

**7. Ueber die Verteilung  
der Energie zwischen Aether und Materie;  
von Max Planck.**

(Aus dem Jubelband für J. Bosscha, Arch. Néerl. p. 55. 1901,  
mitgeteilt vom Verf.)

Vor kurzem habe ich aus der Theorie der elektromagnetischen Strahlung eine Beziehung abgeleitet, welche das absolute Gewicht eines ponderablen Molecüles, sowie auch die absolute elektrische Ladung eines Ions oder Elektrons mit derselben Genauigkeit zu berechnen gestattet, mit welcher die universellen Constanten der Wärmestrahlung eines schwarzen Körpers gemessen sind.<sup>1)</sup> Der physikalische Sinn dieser Beziehung besteht kurz gesagt in der Angabe eines allgemeinen Gesetzes, welches die Verteilung der Energie im stationären Zustand zwischen Aether und Materie regelt. Dass überhaupt in einem mit elektromagnetischer und mechanischer Energie ausgestatteten, nach aussen vollständig abgeschlossenen System im Laufe der Zeit eine ganz bestimmte Energieverteilung eintreten muss, folgt unmittelbar aus dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik, unabhängig von jeder speciellen Annahme über die Einzelheiten der Bewegungs- und der Strahlungsvorgänge. Wie man aber das Gesetz dieser stationären Energieverteilung wirklich finden kann, darüber möchte ich im Folgenden, im Anschluss an meine genannte Arbeit, einige nähere Ausführungen machen, wobei es im Interesse einer zusammenhängenden Darstellung gestattet sein möge, manches schon Bekannte zu wiederholen.

Eins der wichtigsten Mittel zum tieferen Eindringen in die Eigentümlichkeiten physikalischer und chemischer Vorgänge

1) M. Planck, Ann. d. Phys. 4. p. 564. 1901.

von der theoretischen Seite her beruht auf einer gewissen Erweiterung bez. Verallgemeinerung der Bedingungen, welche wir als charakteristisch für den Zustand eines materiellen Systems ansehen. Die der wirklichen Beobachtung und Messung zugänglichen Zustände repräsentiren nach dieser Auffassung nur ganz specielle, durch besondere Eigenschaften ausgezeichnete Fälle unter viel zahlreicheren und viel allgemeineren Zuständen, die in der Natur von vornherein ebensogut möglich sind, die sich aber der Beobachtung nicht, oder nicht so leicht, darbieten. Schon die reine Thermodynamik bietet Beispiele genug von solchen Zuständen, die man dort als „labil“ oder „theoretisch“ zu bezeichnen pflegt. Nehmen wir irgend ein chemisch vollkommen definirtes ruhendes Gas von gleichmässiger Dichte und Temperatur, so wird der Zustand in der Regel durch Masse, Volumen und Temperatur als bestimmt anzunehmen sein. Aber in manchen Fällen ist es vorteilhaft, den Begriff des Zustandes noch allgemeiner zu fassen. Wenn z. B. das Gas teilweise Dissociation erleidet, wie Stickstoff-superoxyd  $N_2O_4$ , welches sich in zwei Molecüle  $NO_2$  spaltet, so ist der Zustand, soweit er sich der Messung darbietet, immer noch vollkommen bestimmt durch Masse, Volumen und Temperatur, aber dennoch betrachtet man in der Theorie ausser diesem Zustand, dem thermodynamischen Gleichgewichtszustand, noch ganz andere, viel allgemeinere Zustände, nämlich solche, welche bei gegebener Masse, Volumen und Temperatur des Gases noch einen ganz willkürlich gewählten Dissociationsgrad aufweisen, obwohl dieselben direct gar nicht zu beobachten sind. In jedem dieser theoretischen Zustände ist der Druck des Gases durch das Volumen, die Temperatur und den Dissociationsgrad nach dem Dalton'schen und dem Avogadro'schen Satze bestimmt, und der Gleichgewichtszustand, entsprechend einem bestimmten Dissociationsgrad und einem bestimmten Druck, geht aus ihnen erst durch eine weitere besondere Bedingung, nämlich durch die des Minimums der freien Energie hervor. Der Vorteil dieser Betrachtungsweise beruht darauf, dass man auf diesem Wege zu einem numerischen, mit der Erfahrung vergleichbaren Gesetz für die Abhängigkeit des Druckes und des Dissociationsgrades von der Dichte und der Temperatur gelangt.

Zu den beschriebenen rein theoretischen Zuständen gehören unter anderem auch diejenigen, welche entstehen, wenn man eine Lösung: fest, flüssig oder gasförmig, durch passende Erwärmung und Volumenvergrößerung ohne jede chemische Veränderung in den idealen Gaszustand übergehen lässt, welchen Process ich früher benutzt habe, um den vollständigen Ausdruck der Entropie und damit die thermodynamischen Eigenschaften einer verdünnten Lösung herzuleiten.<sup>1)</sup>

Noch weiter in der bezeichneten Richtung geht die kinetische Theorie der Gase, auf die ich jetzt näher eingehen möchte, obwohl das Wesentliche der folgenden Bemerkungen durch die Forschungen von L. Boltzmann schon seit langer Zeit bekannt ist.<sup>2)</sup> Der Zustand eines bestimmten aus einfachen Atomen bestehenden, in einem bestimmten Raum eingeschlossenen Gasquantums ist nach der kinetischen Theorie noch nicht bestimmt durch die gesamte ihm mitgeteilte kinetische Energie, sondern erst durch die vollständige Kenntnis der Raum- und der Geschwindigkeitsverteilung, d. h. durch die Angabe der Zahl der Atome, deren Coordinaten und Geschwindigkeitscomponenten je zwischen zwei bestimmten Grenzen liegen. Für den der Beobachtung zugänglichen stationären Zustand besteht allerdings nur eine ganz bestimmte Raumverteilung, nämlich die gleichmässige, und eine ganz bestimmte Geschwindigkeitsverteilung, nämlich die Maxwell'sche, aber im allgemeinen kann man das Verteilungsgesetz, sowohl in Bezug auf den Raum als auch in Bezug auf die Geschwindigkeit, gänzlich willkürlich annehmen, und erst wenn dieses Gesetz gegeben ist, darf man den Zustand des Gases als vollkommen bestimmt ansehen. Jedem solchen beliebig gegebenen Zustand entspricht eine bestimmte Entropie, und das Maximum der Entropie liefert nach dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik die Bedingungen des stationären Zustandes. Daher kommt für die Auffindung des letzteren alles darauf an, den allgemeinen Ausdruck der Entropie des Gases für irgend einen Zustand desselben zu kennen.

1) M. Planck, Wied. Ann. 32. p. 488. 1887.

2) L. Boltzmann, hauptsächlich Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wiss. zu Wien (II.) 76. p. 373. 1877.

Es giebt nun, wie Boltzmann gezeigt hat, einen einfachen Satz, der für jeden beliebig gegebenen Zustand des Gases, d. h. für jedes beliebig gegebene Gesetz der Raum- und der Geschwindigkeitsverteilung die Entropie zu berechnen gestattet, und der daher im Grunde als eine Erweiterung der Definition der Entropie über das Gebiet der reinen Thermodynamik hinaus in das der kinetischen Gastheorie anzusehen ist. Bedenkt man nämlich, dass von vornherein genommen jedes einzelne Atom des Gases jeden beliebigen Ort innerhalb des gegebenen Volumens einzunehmen und jede beliebige Geschwindigkeit nach jeder beliebigen Richtung zu besitzen vermag, so erhellt, dass ein bestimmtes, willkürlich vorgeschriebenes Verteilungsgesetz der Atome im allgemeinen auf ungeheuer verschiedene Weise zu stande kommen kann, je nachdem ein einzelnes ins Auge gefasstes Atom diesem oder jenem Raum- und Geschwindigkeitsintervall angehört. Man denke sich das ganze Raumgebiet (Volumen des Gases) und das ganze Geschwindigkeitsgebiet (für jede der drei Geschwindigkeitscomponenten das Intervall von  $-\infty$  bis  $+\infty$ )<sup>1)</sup> in lauter gleiche kleine Teile zerlegt; dann bildet die Combination je eines Tripels der dreifach vielen Raumelemente mit je einem Tripel der dreifach vielen Geschwindigkeitselemente ein „Elementargebiet“ des Raumes und der Geschwindigkeit, und das gesamte Verteilungsgesetz, mithin der Zustand des Gases, ist charakterisirt durch die Angabe der Zahl der Atome, welche auf jedes der vorhandenen Elementargebiete entfallen. Nennt man eine specielle Verteilung, bei welcher jedem einzelnen Atome ein ganz bestimmtes Elementargebiet zugeordnet ist, eine „Complexion“, so umfasst der durch das vorgeschriebene Verteilungsgesetz bestimmte Zustand des Gases im allgemeinen eine sehr grosse, aber bestimmt angebbare Anzahl  $\mathfrak{P}$  von verschiedenen Complexionen. Die Entropie  $S$  des Gases in einem beliebig gegebenen Zustand ist nun nach dem Boltzmann'schen Satze bis auf eine willkürlich zu wählende additive Constante proportional dem natürlichen Logarithmus der

1) Streng genommen sind die Grenzen des Geschwindigkeitsgebietes nicht unendlich, sondern durch den vorgeschriebenen Wert der Energie des Gases beschränkt.

Zahl  $\mathfrak{B}$  der diesem Zustand entsprechenden verschiedenen Complexionen:

$$S = k \log \mathfrak{B} + \text{const.}$$

Die Proportionalitätsconstante  $k$  hängt von der Einheit ab, mit welcher man die Temperatur misst. Würde man die Temperatur eines Gases direct gleich der mittleren Energie eines Atoms setzen, so wäre  $k = \frac{2}{3}$ . Da aber die Einheit der Temperatur durch die conventionelle Festsetzung geregelt ist, dass der Abstand des Siedepunktes vom Gefrierpunkt für Wasser gleich 100, so ist die Constante  $k$  von der Dimension einer Energie dividirt durch eine Temperatur.

Um den angeführten Satz noch in etwas anderer Weise, als es Boltzmann gethan hat, zu illustriren, berechnen wir als Beispiel die Entropie eines Gases für einen fingirten Fall. Es seien zehn Atome vorhanden und sieben Elementargebiete des Raumes und der Geschwindigkeit. Das den Zustand des Gases bestimmende Verteilungsgesetz sei nun derart gegeben, dass von den zehn Atomen

1 Atom	im 1. Elementargebiet	
2 Atome	„ 2.	„
0 „	„ 3.	„
0 „	„ 4.	„
1 Atom	„ 5.	„
4 Atome	„ 6.	„
2 „	„ 7.	„

liegen.

Dann ist zunächst die Zahl  $\mathfrak{B}$  der verschiedenen Complexionen zu berechnen, welche das gegebene Verteilungsgesetz liefern. Jede einzelne Complexion lässt sich offenbar in folgender Weise durch ein Ziffernbild versinnlichen. Wir bezeichnen die einzelnen Atome mit den Ziffern 1—10, und schreiben diese Ziffern der Reihe nach nebeneinander. Um nun eine bestimmte Complexion auszudrücken, setzen wir unter jede Atomziffer die Nummer desjenigen Elementargebietes, welchem das betreffende Atom bei dieser Complexion angehört, also z. B.

1.	2	3	4	5	6	7	8	9	10
6	1	7	5	6	2	2	6	6	7

Hier kommt die Nummer 1 einmal, die Nummer 2 zweimal, die Nummer 3 und 4 keinmal, die Nummer 5 einmal, die Nummer 6 viermal und die Nummer 7 zweimal vor, gerade wie es im Verteilungsgesetz vorgeschrieben ist. Jede Complexion besitzt, wie man sieht, ihr besonderes Ziffernbild, und die Anzahl aller möglichen verschiedenen Complexionen ist daher gleich der Anzahl aller möglichen verschiedenen Ziffernbilder, d. h. gleich der Zahl der Permutationen von zehn Elementen, unter denen vier von einer Art, zwei von einer anderen Art, und zwei von einer dritten Art einander gleich sind. Also:

$$\mathfrak{P} = \frac{10!}{1!2!0!0!1!4!2!} = 37800.$$

Daher ist die Entropie des Gases in dem gegebenen Zustand:

$$S = k \log 37800 + \text{const.}$$

Nach dem Schema dieser Berechnung lässt sich leicht der allgemeine Ausdruck für die Entropie eines aus  $N$  Atomen bestehenden Gases in einem beliebig gegebenen Zustand ableiten. Sei die Zahl der Atome, deren Coordinaten und Geschwindigkeitscomponenten zwischen den Werten:

$$x \text{ und } x + dx, \quad y \text{ und } y + dy, \quad z \text{ und } z + dz,$$

$$\xi \text{ „ } \xi + d\xi, \quad \eta \text{ „ } \eta + d\eta, \quad \zeta \text{ „ } \zeta + d\zeta$$

liegen, gegeben durch den Ausdruck:

$$f(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) dx dy dz d\xi d\eta d\zeta,$$

wobei

$$dx dy dz d\xi d\eta d\zeta = d\sigma$$

die Grösse eines Elementargebietes der Coordinaten und Geschwindigkeiten bezeichnet, so ist durch die Function  $f$  der Zustand des Gases bestimmt. Die Anzahl der möglichen verschiedenen Complexionen ist dann, wie oben:

$$\mathfrak{P} = \frac{N!}{\Pi (f(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) d\sigma)!},$$

wobei das Zeichen  $\Pi$  das Product über alle Elementargebiete  $d\sigma$  bedeutet. Die Entropie des Gases ergibt sich dabei, unter besonderer Berücksichtigung des Umstandes, dass in einem Elementargebiete sich immer noch viele Atome befinden und dass alle Elementargebiete gleich gross sind, zu:<sup>1)</sup>

$$S = k \log \mathfrak{P} + \text{const.},$$

$$S = \text{const.} - k \int f \cdot \log f \cdot d\sigma.$$

Zur Prüfung der allgemeinen Zulässigkeit dieses Ausdruckes und zugleich zur Bestimmung der Constanten  $k$  dient die Berechnung von  $S$  für den stationären Zustand des Gases und Identificirung dieser Grösse mit der aus der Thermodynamik bekannten Clausius'schen Entropie.

Das Gesetz der stationären Raum- und Geschwindigkeitsverteilung wird durch diejenige Function  $f$  ausgedrückt, welche die Entropie  $S$  bei gegebener Atomzahl:

$$N = \int f d\sigma,$$

gegebenem Gesamtvolumen  $V$ , und gegebener Gesamtenergie:

$$U = \frac{m}{2} \int (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) f d\sigma$$

( $m$  Masse eines Atomes) zu einem Maximum macht. Diese Bedingung ergibt nach den Regeln der Variationsrechnung:

$$f = \alpha \cdot e^{-\beta (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)},$$

wobei wegen der gegebenen Werte von  $N$ ,  $V$  und  $U$ :

$$\alpha = \frac{N}{V} \cdot \left( \frac{3 m N}{4 \pi U} \right)^{3/2},$$

$$\beta = \frac{3 m N}{4 U},$$

und daraus folgt der Maximalwert von  $S$ :

$$S = \text{const.} + k N \left( \frac{3}{2} \log U + \log V \right).$$

1) L. Boltzmann, Vorlesungen über Gastheorie 1. p. 42. 1896.

Nun ist andererseits die thermodynamisch definirte Entropie eines im Gleichgewichtszustand befindlichen, aus  $n$  g-Atomen bestehenden Gases vom Volumen  $V$  und der Temperatur  $\vartheta$ :

$$S = \text{const.} + n(c_v \log \vartheta + R \log V).$$

$R$  bedeutet die sogenannte absolute Gasconstante ( $8,31 \cdot 10^7$  für  $O = 16$ ),  $c_v$  die Wärmecapacität eines g-Atomcs bei constantem Volumen im mechanischen Maasse. Da nun erstens  $\vartheta$  proportional  $U$ , und zweitens bei einatomigen Gasen:

$$c_v : R = 3 : 2,$$

so findet absolute Uebereinstimmung zwischen beiden Formeln für  $S$  statt, wenn gesetzt wird:

$$nR = kN.$$

Bezeichnen wir also das von der Natur des Gases unabhängige Verhältnis der Masse eines Atomes zur Masse des g-Atomcs mit  $\omega$ , so ist:

$$\frac{n}{N} = \omega,$$

$$k = \omega R$$

und der allgemeine Ausdruck für die Entropie, in mechanischem Maasse, wird:

$$S = \omega R \log \mathfrak{P} + \text{const.}$$

Solange  $\omega$  unbekannt ist, lassen sich die beiden Factoren  $\omega$  und  $\log \mathfrak{P}$  nicht einzeln berechnen, sondern nur ihr Product.

Eine besondere Anschaulichkeit gewinnt die Grösse der Entropie durch die Einführung des Begriffes der Wahrscheinlichkeit. Da nämlich die Zahl  $\mathfrak{P}$  aller möglichen verschiedenen Complexionen, welche einem bestimmten Zustand entsprechen, zugleich die Wahrscheinlichkeit dieses Zustandes angiebt, so kann man allgemein sagen, dass die Entropie des Gases in irgend einem Zustand ein Maass ist für die Wahrscheinlich-



keit dieses Zustandes, und dass der stationäre Zustand durch den grössten Wert der Wahrscheinlichkeit ausgezeichnet ist.

Gehen wir nun von der kinetischen Gastheorie zur Theorie der Wärmestrahlung über, die wir als einen elektromagnetischen Vorgang auffassen, so treffen wir in gewissem Sinn ganz ähnliche Verhältnisse an. Auch hier hat es sich für die Ableitung des stationären Strahlungszustandes von Vorteil erwiesen, zunächst von viel allgemeineren Zuständen auszugehen, die durch ganz beliebige Verteilungen der elektromagnetischen Energie charakterisirt sind, sowohl im frei durchstrahlten Felde (Vacuum) als auch in mitschwingenden, absorbirenden und emittirenden Resonatoren, deren Schwingungsenergie wir der Einfachheit halber auch mit zur elektromagnetischen Energie rechnen wollen. Jedem solchen durch eine willkürlich vorgeschriebene Energieverteilung definirten Zustand entspricht eine bestimmte Entropie, und das Maximum dieser Entropie ergiebt den Zustand der stationären, sogenannten normalen Energieverteilung, wie sie im Spectrum eines schwarzen Körpers auftritt. Der allgemeine Ausdruck der Entropie lässt sich durch ein dem oben geschilderten ganz ähnliches Wahrscheinlichkeitsverfahren finden. Wir betrachten im Folgenden nur die Verteilung der Energie auf einzelne, und zwar lineare Resonatoren von bestimmter Eigenperiode. Es seien  $N_1, N_2, N_3, \dots$  die Zahlen der im ganzen vorhandenen Resonatoren, je mit der Eigenperiode  $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \dots$ , und die Energieverteilung unter ihnen sei in der Art vorgeschrieben, dass auf jede einzelne Gattung, d. h. auf die Resonatoren je einer Eigenperiode, eine nach Willkür bestimmte Schwingungsenergie  $U_1, U_2, U_3, \dots$  entfällt. Dann entspricht der Verteilung der Energie  $U_1$  auf die  $N_1$  Resonatoren der ersten Gattung eine in ganz bestimmter Weise<sup>1)</sup> zu berechnende Anzahl von möglichen Complexionen  $\mathfrak{N}_1$ , ebenso der Verteilung der Energie  $U_2$  auf die  $N_2$  Resonatoren der zweiten Gattung eine bestimmte Complexionszahl  $\mathfrak{N}_2$  etc., sodass, da jede Com-

1) M. Planck, Verhandl. d. Deutsch. physik. Gesellsch. 2. p. 239. 1900 oder Ann. d. Phys. 4. p. 557. 1901.

plexion innerhalb einer Resonatorgattung mit jeder beliebigen anderen innerhalb einer anderen Gattung combinirt werden kann, die gesamte vorgeschriebene Energieverteilung auf

$$\mathfrak{N}_1 \cdot \mathfrak{N}_2 \cdot \mathfrak{N}_3 \dots = \mathfrak{N}$$

verschiedene Arten zu stande kommen kann.

Auch hier hat sich nun wieder der Satz als gültig erwiesen, dass in jedem Falle die Entropie des durch die vorgeschriebene Energieverteilung definirten Zustandes bis auf eine willkürliche additive Constante proportional ist dem natürlichen Logarithmus der dem Zustand entsprechenden Gesamtzahl von Complexionen:

$$S = k \log \mathfrak{N} + \text{const.},$$

wobei

$$k = 1,346 \cdot 10^{-16} \frac{\text{Erg}}{\text{Grad}}$$

Daher giebt auch hier die Entropie durch ihre Grösse ein Maass für die Wahrscheinlichkeit irgend einer beliebigen vorgenommenen Verteilung, und der Zustand der stationären Verteilung ist unter allen anderen durch die grösste Wahrscheinlichkeit ausgezeichnet.

Nachdem wir nun einerseits die Verteilung der mechanischen Energie zwischen bewegten Atomen, andererseits die Verteilung der elektromagnetischen Energie zwischen schwingenden Resonatoren erörtert haben, wenden wir uns nunmehr schliesslich zu der Frage nach der stationären Verteilung der Energie in einem System, welches sowohl mechanisch bewegte Atome, als auch elektromagnetisch schwingende Resonatoren enthält<sup>1)</sup>, und kehren somit zurück zu dem im Titel dieser Abhandlung bezeichneten Problem der Energieverteilung zwischen Aether und Materie. Es fragt sich also, welcher Bruchteil der gesamten Energie eines nach aussen vollständig abgeschlossenen Systems in dem vom zweiten Hauptsatz der

1) Die Frage, ob die Resonatoren mit den Atomen identisch sind, kann hier ganz offen bleiben.

Wärmethorie geforderten stationären Endzustand als mechanische Energie im Sinne der kinetischen Gastheorie, welcher Bruchteil als elektromagnetische Energie im Sinne der elektromagnetischen Strahlungstheorie auftritt.

Selbstverständlich können wir auch hier wieder zunächst von einer ganz beliebigen Verteilung ausgehen. Jedem Zustand, welcher durch eine willkürlich vorgeschriebene Raum- und Geschwindigkeitsverteilung zwischen den Atomen und Energieverteilung zwischen den Resonatoren bestimmt ist, wird eine ganz bestimmte Gesamtentropie entsprechen, und diese Gesamtentropie wird gegeben sein durch die Summe:

$$S = \omega R \log \mathfrak{B} + k \log \mathfrak{R} + \text{const.},$$

wobei der erste Summand die oben behandelte mechanische Entropie, der zweite die elektromagnetische Entropie vorstellt, welche Grössen beide nach Maassgabe der oben gemachten Auseinandersetzungen in ganz bestimmter Weise durch Zählung der entsprechenden Complexionen zu berechnen sind, da ja der Verteilungszustand als vollständig bekannt angenommen ist. Nach dem zweiten Hauptsatz der Wärmethorie wird dann unter allen bei einer bestimmten Gesamtenergie des Systems überhaupt möglichen Zuständen der stationäre Zustand durch das Maximum von  $S$  ausgezeichnet sein.

Nun haben wir oben gesehen, dass die mechanische Entropie eines Gases in irgend einem Zustand ganz allgemein ein Maass der Wahrscheinlichkeit dieses Zustandes darstellt, ferner dass genau dasselbe gilt für die elektromagnetische Entropie eines Systems von Resonatoren. Da ist die Folgerung nicht abzulehnen, dass diese beiden an sich schon sehr allgemeinen, in zwei ganz verschiedenen Gebieten der Physik genau in gleicher Weise wiederkehrenden Beziehungen zwischen Entropie und Wahrscheinlichkeit einen gemeinsamen Ursprung haben, und dieser kann nur in folgendem vollständig allgemeinen Satze liegen:

*Die Entropie eines Systems in irgend einem Zustand hängt nur ab von der Wahrscheinlichkeit dieses Zustandes.*

Dann würde zugleich auch der zweite Hauptsatz der Thermodynamik, der Satz der Vermehrung der Entropie, welcher ja auch nicht bloss für ruhende und strahlende Wärme

einzelnen, sondern ebenso für die Wechselwirkungen beider Vorgänge gilt, in jedem Falle eine direct anschauliche Bedeutung bekommen, indem dann der thermodynamische Gleichgewichtszustand jedes Systems immer zugleich auch der wahrscheinlichste Zustand desselben ist. Nimmt man aber diesen Satz als richtig an — und ohne ihn dürfte meiner Meinung nach der Zusammenhang zwischen Entropie und Wahrscheinlichkeit überhaupt nicht aufrecht zu erhalten sein — so folgt, dass der Wert von  $S$  nur von dem Product der Complexionen  $\mathfrak{P} \mathfrak{N}$  abhängen kann; denn da nach der elektromagnetischen Theorie der Strahlung die mechanischen und die elektromagnetischen Complexionen ganz unabhängig voneinander sind, so ist die Wahrscheinlichkeit des zusammengesetzten Zustandes gleich dem Product der Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Zustände. Es muss also gelten:

$$\omega R = k.$$

Dann ist:

$$S = k \log (\mathfrak{P} \mathfrak{N}) + \text{const.}$$

und der aus der Wärmestrahlung berechnete, oben angegebene Wert von  $k$  gilt vollständig allgemein für die Definition der Entropie aus der Wahrscheinlichkeit, auch in der kinetischen Gastheorie. Die am Anfang aufgeworfene Frage nach der Verteilung der Energie zwischen Aether und Materie beantwortet sich dann dahin, dass diejenige Verteilung die stabile ist, welche die grösste Anzahl von Complexionen, mechanische und elektromagnetische zusammen genommen, zulässt. Die Verallgemeinerung dieses Resultates auf mehratomige Moleküle, sowie auf die Strahlung im freien Aether und auf complicirter gebaute Resonatoren dürfte keine principiellen Schwierigkeiten mehr bieten, wenn auch die praktische Durchführung zum Teil noch unthunlich sein wird.

Aus der letzten Gleichung folgt:

$$\omega = \frac{k}{R} = \frac{1,346 \cdot 10^{-16}}{8,31 \cdot 10^7} = 1,62 \cdot 10^{-24},$$

d. h. die Masse eines Atomes oder Moleküles ist das  $1,62 \cdot 10^{-24}$  fache der Masse des g-Atomes oder g-Moleküles.

Das Elementarquantum der Elektrizität, d. h. die elektrische Ladung eines einwertigen Ions, ergibt sich hieraus, elektrostatisch gemessen, zu:

$$e = 1,62 \cdot 10^{-24} \cdot 9654 \cdot 3 \cdot 10^{10} = 4,69 \cdot 10^{-10}.$$

Jede Verbesserung des Wertes der Strahlungsconstanten  $k$  wird nach dieser Theorie immer zugleich auch eine verfeinerte Messung des absoluten Gewichtes der Atome und der absoluten Grösse des elektrischen Elementarquantums darstellen.

(Eingegangen 20. Juli 1902.)