6. *Ueber die von einem elliptisch schwingenden Ion emittirte und absorbirte Energie; von Max Planck.*

(Aus dem Jubelband für H. A. Lorentz, Arch. Néerl. p. 164. 1900, mitgeteilt vom Verfasser.)

Unter den Vorstellungen, welche man sich gegenwärtig von den Vorgängen bilden kann, die in den Centren der Emission und der Absorption der Licht- und Wärmestrahlung sich abspielen, besitzt durch ihre Einfachheit und Verwendbarkeit die grössten Vorzüge die namentlich von H. A. Lorentz ausgebildete Annahme, dass die Quelle aller Strahlungserscheinungen in schnellen Schwingungen discreter elektrisch geladener Teilchen, der Ionen oder Elektronen, besteht, welche ihre Schwingungsenergie durch Ausstrahlung dem umgebenden Aether mitteilen, und umgekehrt durch Absorption von ihm empfangen können. In den gewöhnlichen ponderabeln Körpern hat man sich diese schwingenden Ionen sehr nahe aneinanderliegend zu denken, sodass die unmittelbar benachbarten mit sehr bedeutenden Kräften aufeinander wirken werden. Aber die Fähigkeit eines schwingenden Ions, Energie zu emittiren und auffallende Strahlung zu absorbiren, ist ihrem Wesen nach nicht notwendig an das Vorhandensein benachbarter Ionen, sondern vielmehr an die Schwingungsvorgänge des Ions selbst gebunden; und wenn man auch aus der Emission und Absorption eines einzelnen Ions noch keineswegs unmittelbar auf die entsprechenden Grössen in einem System von dicht aneinander gelagerten Ionen schliessen kann, so dürfte es doch als Vorarbeit für die Behandlung zusammengesetzter Fälle nützlich sein, die quantitative Berechnung der von einem einzelnen schwingenden Ion emittirten und absorbirten Energie auszuführen.

Zunächst soll über die Schwingungsform des Ions gar keine specielle Annahme gemacht werden. Die einzige Voraussetzung, von der wir ausgehen, ist, dass das im Vacuum befindliche Ion, mit einem anderen ruhenden Ion von gleicher und entgegengesetzter Ladung zu einem Molecül vereinigt, schnelle Schwingungen ausführt und daher in jedem Augenblick mit jenem zusammen einen elektrischen Dipol vorstellt, von schnell wechselndem Moment, und dass die Dimensionen dieses Dipols beständig klein sind gegen die Länge der von ihm in das Vacuum ausgesendeten Welle, oder, für unperiodische Vorgänge, gegen diejenige Länge, welche erhalten wird, wenn man die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes im Vacuum dividirt durch die „verhältnismässige Geschwindigkeit" $1/X.\partial X/\partial t$ der Schwingungen des Ions, wobei X irgend eine Schwingungscomponente bedeutet. Nur unter dieser Voraussetzung ist nämlich der elektrische Zustand des Molecüls durch sein elektrisches Moment als vollkommen bestimmt anzusehen, da sonst die elektrische Kraft eine merkliche Zeit brauchen würde, um sich von einer Stelle des Molecüls zu einer anderen fortzupflanzen, und nur unter dieser Voraussetzung kann man die elektrischen Vorgänge im umgebenden Felde immer in bestimmtem Sinne in eine „primäre", von aussen auf das Ion fallende und dasselbe erregende, und in eine „secundäre", vom Ion als Centrum ausgehende Welle zerlegen, ebenso wie auch nur dann die gesamte vorhandene Energie sich zerlegen lässt in einen Teil, der von dem augenblicklichen Schwingungszustand des Ions abhängt, und den wir die Schwingungsenergie des Ions nennen wollen, und in einen anderen Teil, den wir die Energie des umgebenden Feldes nennen.

Wir wollen uns zunächst mit der „secundären", vom schwingenden Ion ausgehenden Welle beschäftigen, indem wir etwa annehmen, dass gar keine erregende Welle vorhanden ist und nur einfaches Abklingen stattfindet. Es handelt sich dann um die Berechnung der von dem schwingenden Ion emittirten Energie. Sei der Vector, welcher das elektrische Moment des im Anfangspunkt der Coordinaten befindlichen Dipols darstellt, mit $\mathfrak{m}$ bezeichnet[1]); dann ist die von dem

---

1) Die Bezeichnungen schliessen sich ganz denen von H. A. Lorentz in seinem „Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern" an, mit der alleinigen Ausnahme, dass ich hier, um den Zusammenhang mit meinen früheren Arbeiten aufrecht zu erhalten, für die elektrischen Grössen das elektrostatische Maasssystem benutze.

Molecül sich nach aussen fortpflanzende elektromagnetische Welle an irgend einem Ort x, y, z, dessen Entfernung r vom Molecül gross ist gegen die Dimensionen desselben, zu irgend einer Zeit t gegeben durch die Componenten der elektrischen Kraft[1]:

$$\mathfrak{F}_x = \frac{\partial S}{\partial x} - \Delta\left(\frac{\mathfrak{m}_x}{r}\right), \quad \ldots$$

und der magnetischen Kraft:

$$(1) \qquad \begin{cases} \mathfrak{H}_x = \dfrac{1}{V}\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\mathfrak{m}_z}{r} - \dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{\mathfrak{m}_y}{r}\right) \\ \quad\;\; = \dfrac{1}{V}\left(\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\dot{\mathfrak{m}}_z}{r} - \dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{\dot{\mathfrak{m}}_y}{r}\right), \ldots \end{cases}$$

Hierbei ist

$$(2) \qquad S = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\mathfrak{m}_x}{r} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\mathfrak{m}_y}{r} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathfrak{m}_z}{r}$$

und in $\mathfrak{m}_x$, $\mathfrak{m}_y$, $\mathfrak{m}_z$ ist, wie auch überall im Folgenden, statt des Argumentes t der Wert $t - r/V$ (V Lichtgeschwindigkeit) zu setzen, sodass jede dieser drei Grössen Function von $t - r/V$ ist.

Bedenkt man, dass:

$$\Delta\frac{\mathfrak{m}_x}{r} = \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\mathfrak{m}_x}{r} = \frac{1}{V^2}\frac{\ddot{\mathfrak{m}}_x}{r},$$

so kann man auch schreiben:

$$(3) \qquad \mathfrak{F}_x = \frac{\partial S}{\partial x} - \frac{1}{V^2}\frac{\ddot{\mathfrak{m}}_x}{r}, \ldots$$

und erkennt, dass in der Nähe des Dipols, wo die Glieder mit der ersten Potenz von r im Nenner gegen die mit höheren Potenzen verschwinden, die elektrische Kraft $\mathfrak{F}$ ein Potential hat, vom Werte:

$$-S = -\left(\mathfrak{m}_x\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x} + \mathfrak{m}_y\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y} + \mathfrak{m}_z\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right)$$

herrührend von dem elektrischen Moment $\mathfrak{m}$ des Dipols.

---

1) H. A. Lorentz, l. c. p. 53, woselbst die Lösung für den allgemeineren Fall gegeben ist, dass das Molecül eine Translationsgeschwindigkeit $\mathfrak{p}$ besitzt.

Emittirte Energie.

Um die von dem schwingenden Ion nach allen Richtungen emittirte Energie zu erhalten, legen wir um das Molecül eine Kugelfläche mit dem gegen seine Dimensionen grossen, aber gegen die Wellenlänge kleinen Radius r, und berechnen nach dem Poynting'schen Satz die in der Zeit dt nach aussen strömende Energie:

$$dE = dt \cdot \frac{V}{4\pi} \cdot \int [\mathfrak{F} \cdot \mathfrak{H}]_n \, d\sigma.$$

Der Ausdruck hinter dem Integralzeichen bedeutet die in der Richtung der äusseren Normale n von $d\sigma$, d. h. des Kugelradius r, genommene Componente des Vectorproductes aus elektrischer und magnetischer Kraft. Ordnen wir die Glieder nach den Componenten $\mathfrak{F}_x$, $\mathfrak{F}_y$, $\mathfrak{F}_z$ der elektrischen Kraft, so ergiebt sich:

$$dE = dt \cdot \frac{V}{4\pi} \int d\sigma \left\{ \mathfrak{F}_x \left(\mathfrak{H}_y \frac{z}{r} - \mathfrak{H}_z \frac{y}{r} \right) + \ldots \right\}$$

oder, mit Benutzung der aus (1) und (2) folgenden Identität:

$$\mathfrak{H}_y \frac{z}{r} - \mathfrak{H}_z \frac{y}{r} = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial}{\partial r} \frac{\dot{\mathfrak{m}}_x}{r} - \dot{S} \frac{x}{r} \right),$$

$$dE = \frac{dt}{4\pi} \int d\sigma \left\{ \mathfrak{F}_x \left(\frac{\partial}{\partial r} \frac{\dot{\mathfrak{m}}_x}{r} - \dot{S} \frac{x}{r} \right) + \ldots \right\}$$

Diese in der Zeit dt durch die Kugelfläche nach aussen strömende Energie dE ist aber nicht identisch mit der in derselben Zeit emittirten Energie. Denn sie enthält gewisse, und zwar sehr grosse Glieder, welche sich als vollständige Differentialquotienten nach der Zeit darstellen und deren zeitliches Integral daher nur von dem augenblicklichen Schwingungszustand des Dipols abhängt, d. h. ebenso wie das elektrische Moment $\mathfrak{m}$ bald zu und bald abnimmt. Diese Energie strömt also durch die Kugelfläche hin und her, abwechselnd nach der einen und nach der anderen Seite, sie ist daher nicht der emittirten Energie, welche den Dipol dauernd verlässt und in das umgebende Feld übergeht, sondern der Eigenenergie des Molecüles zuzurechnen, die sich abwechselnd auf grössere und kleinere Entfernungen vom Dipol hin verbreitet. Da es sich hier nun lediglich um die Berechnung der endgültig emittirten Energie handelt, so sind in dem Ausdruck von dE alle diejenigen Glieder wegzulassen, welche als vollständige Differentialquotienten der Zeit dargestellt werden können. Allerdings liegt in dieser Abspaltung einzelner Glieder eine gewisse Unbestimmtheit, aber die damit verbundene Willkür wird um so geringer, für je grössere Zeiten man die emittirte Energie berechnet. Bei der Licht- und Wärmestrahlung spielt dieselbe wohl niemals eine Rolle, da hier für die emittirte Energie immer nur solche Zeiten in Betracht kommen, die gegen die Dauer einer Schwingung ungeheuer gross sind.

Ersetzt man nun in dem letzten Ausdruck von dE die elektrische Kraft $\mathfrak{F}_x$, $\mathfrak{F}_y$, $\mathfrak{F}_z$ durch ihre in (3) angegebenen Werte, so erhält man hinter dem Integralzeichen zunächst das Glied:

$$\frac{\partial S}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial r}\frac{\dot{\mathfrak{m}}_x}{r} - \dot{S}\frac{x}{r}\right) + \dots,$$

welches sich bei näherer Untersuchung als ein vollständiger Differentialquotient nach der Zeit t herausstellt, und zwar als der Differentialquotient der Function:

$$\frac{1}{2r}\cdot\left\{\left(\frac{\partial}{\partial r}\frac{\mathfrak{m}_x}{r}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial r}\frac{\mathfrak{m}_y}{r}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial r}\frac{\mathfrak{m}_z}{r}\right)^2 - S^2\right\},$$

wie man auch durch Differentiation dieser Function nach t unter Berücksichtigung des Ausdruckes (2) von S erkennen kann.

Nach den obigen Ausführungen liefert dieses Glied keinen Beitrag zur emittirten Energie und kann daher weggelassen werden.

Der Rest von dE beträgt:

$$-\frac{dt}{4\pi V^2}\int d\sigma\left\{\frac{\dot{\mathfrak{m}}_x}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\frac{\dot{\mathfrak{m}}_x}{r} - \dot{S}\frac{x}{r}\right) + \dots\right\}.$$

Nun ist

$$\frac{\partial}{\partial r}\frac{\mathfrak{m}_x}{r} = -\frac{\mathfrak{m}_x}{r^2} - \frac{1}{V}\frac{\dot{\mathfrak{m}}_x}{r}.$$

Folglich:

$$\frac{\partial}{\partial r}\frac{\dot{\mathfrak{m}}_x}{r} = -\frac{\dot{\mathfrak{m}}_x}{r^2} - \frac{1}{V}\frac{\ddot{\mathfrak{m}}_x}{r}, \tag{4}$$

Die Einsetzung dieses Wertes in den Energieausdruck ergiebt abermals ein Glied, welches einen vollständigen Differentialausdruck nach t darstellt, nämlich das Glied:

$$\frac{\dot{\mathfrak{m}}_x}{r} \cdot \frac{\mathfrak{m}_x}{r^2}$$

und daher wegzulassen ist. Es bleibt übrig:

$$\frac{d\,t}{4\,\pi\,V^3}\int d\,\sigma\,\{\ddot{\mathfrak{m}}_x^2 + \ddot{\mathfrak{m}}_y^2 + \ddot{\mathfrak{m}}_z^2 + V\dot{S}\,(x\,\ddot{\mathfrak{m}}_x + y\,\ddot{\mathfrak{m}}_y + z\,\ddot{\mathfrak{m}}_z)\}.$$

Endlich führen wir die Componente des Momentes $\mathfrak{m}$ in der Richtung r ein:

$$\mathfrak{m}_x\frac{x}{r} + \mathfrak{m}_y\frac{y}{r} + \mathfrak{m}_z\frac{z}{r} = \mathfrak{m}_r.$$

Dann ist

$$x\,\ddot{\mathfrak{m}}_x + y\,\ddot{\mathfrak{m}}_y + z\,\ddot{\mathfrak{m}}_z = r\,\ddot{\mathfrak{m}}_r$$

und mit Berücksichtigung von (2) und (4):

$$\begin{aligned}\dot{S} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\dot{\mathfrak{m}}_x}{r} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\dot{\mathfrak{m}}_y}{r} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\dot{\mathfrak{m}}_z}{r}\\ &= -\frac{\dot{\mathfrak{m}}_r}{r^2} - \frac{1}{V}\cdot\frac{\ddot{\mathfrak{m}}_r}{r},\end{aligned}$$

wodurch sich, unter Weglassung eines weiteren Gliedes, die emittirte Energie in der Form ergiebt:

$$\frac{d\,t}{4\,\pi\,V^3\,r^2}\int d\,\sigma\,(\ddot{\mathfrak{m}}_x^2 + \ddot{\mathfrak{m}}_y^2 + \ddot{\mathfrak{m}}_z^2 - \ddot{\mathfrak{m}}_r^2),$$

oder kürzer geschrieben[1]):

$$\frac{d\,t}{4\,\pi\,V^3\,r^2}\int d\,\sigma\,(\ddot{\mathfrak{m}}^2 - \ddot{\mathfrak{m}}_r^2).$$

Hier können $\ddot{\mathfrak{m}}$ und $\ddot{\mathfrak{m}}_r$, statt als Functionen von $t - r/V$, als Functionen von t allein angesehen werden, da nach der Voraussetzung r klein ist gegen die Wellenlänge. Dies Resultat lässt sich folgendermaassen in Worte fassen:

Die von einem elektrischen Dipol mit dem veränderlichen Moment $\mathfrak{m}$ nach irgend einer Richtung r emittirte Energie ist proportional dem Quadrate der senkrecht zu r genommenen Componente des Vectors $\ddot{\mathfrak{m}}$. Da ferner $\mathfrak{m}$ durch das Product der unveränderlichen Ladung des beweglichen Ions und seiner

1) $\ddot{\mathfrak{m}}$ bedeutet nicht den zweiten Differentialquotienten der Grösse des Vectors $\mathfrak{m}$, sondern die Grösse des Vectors, welcher die Componenten $\ddot{\mathfrak{m}}_x$, $\ddot{\mathfrak{m}}_y$, $\ddot{\mathfrak{m}}_z$ besitzt. (H. A. Lorentz, l. c. p. 10.)

Entfernung von dem entgegengesetzt geladenen als ruhend angenommenen Ion gegeben ist, so wird die Ausstrahlung in der Richtung r bedingt durch die senkrecht zu r genommene Componente der Beschleunigung des beweglichen Ions.

Zur Berechnung der Gesamtemission setzen wir den Winkel, welchen die Richtung des Vectors $\ddot{\mathfrak{m}}$ mit r bildet, gleich ϑ, und

$$d\sigma = r^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi.$$

Dann folgt für die ganze in der Zeit dt vom schwingenden Ion emittirte Energie:

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dt}{4\pi V^3}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi\, \ddot{\mathfrak{m}}^2 \sin^2\vartheta &= \frac{2}{3}\frac{dt}{V^3}\, \ddot{\mathfrak{m}}^2 \\ &= \frac{2}{3}\frac{dt}{V^3}\,(\ddot{\mathfrak{m}}_x^2 + \ddot{\mathfrak{m}}_y^2 + \ddot{\mathfrak{m}}_z^2). \end{aligned} \right.$$

Die nach allen Richtungen emittirte Energie setzt sich also additiv zusammen aus den von den drei linearen Schwingungen $\mathfrak{m}_x$, $\mathfrak{m}_y$, $\mathfrak{m}_z$ emittirten Energien.

Vorstehendes Resultat wird sich jedenfalls noch leichter ableiten lassen, wenn man statt der rechtwinkligen Coordinaten x, y, z von vornherein Polarcoordinaten benutzt.

Absorbirte Energie.

Wenn das betrachtete Ion von einer im umgebenden Felde fortschreitenden elektromagnetischen Welle getroffen wird, so wird auf seine Ladung eine Kraft ausgeübt und dadurch Energie übertragen werden. Diese Energie, welche den Schwingungen des Ions zugeführt wird, geht der erregenden, primären Welle verloren und ist daher als von dem Ion absorbirt zu bezeichnen. Die Berechnung derselben ist sehr einfach. Nennen wir jetzt $\mathfrak{F}_x$, $\mathfrak{F}_y$, $\mathfrak{F}_z$ die Componenten der elektrischen Kraft der erregenden Welle am Orte des Ions, wobei wir wieder voraussetzen, dass die Dimensionen der Bahn des Ions so klein sind, dass diese Grössen von ihr nicht abhängen, so ist die Arbeit, welche die erregende Welle an dem bewegten Ion in der Zeit dt leistet, nach unserer bisherigen Bezeichnung:

$$(6)\qquad (\mathfrak{F}_x\,\dot{\mathfrak{m}}_x + \mathfrak{F}_y\,\dot{\mathfrak{m}}_y + \mathfrak{F}_z\,\dot{\mathfrak{m}}_z)\, dt$$

und dies daher auch die von dem bewegten Ion in der Zeit dt absorbirte Energie. In der Licht- und Wärmestrahlung wird diese Grösse gewöhnlich als wesentlich positiv angesehen; das ist aber nur dann zutreffend, wenn die absorbirte Energie nicht für ein Zeitelement, sondern für eine im Verhältnis zu einer Schwingungsperiode grosse Zeit genommen wird.

Elliptisch schwingendes Ion.

Die vollständigen Bewegungsgleichungen des Ions können erst dann aufgestellt werden, wenn die Abhängigkeit seiner Schwingungsenergie von seinem elektrischen Moment $\mathfrak{m}$ und dessen zeitlichen Differentialquotienten $\dot{\mathfrak{m}}$ bekannt sind. Der einfachste Fall, den wir wegen seiner Bedeutung für die Licht- und Wärmestrahlung im Folgenden noch kurz betrachten wollen, ist der der nahezu elliptischen Schwingung. Dieser Vorgang ist nahezu periodisch; er wird streng periodisch, wenn Energie im Ganzen weder emittirt noch absorbirt wird. Bei angenäherter Periodicität machen sich die Einflüsse der Emission und Absorption von Energie nur verhältnismässig langsam, erst nach Ablauf einer grossen Anzahl von Schwingungen, merklich geltend. Sehen wir zunächst von diesen Einflüssen ganz ab, so ist die Energie des schwingenden Ions constant zu setzen. Der Ausdruck derselben hat in dem betrachteten Falle die einfache Form:

$$\tfrac{1}{2} K(\mathfrak{m}_x^2 + \mathfrak{m}_y^2 + \mathfrak{m}_z^2) + \tfrac{1}{2} L(\dot{\mathfrak{m}}_x^2 + \dot{\mathfrak{m}}_y^2 + \dot{\mathfrak{m}}_z^2),$$

wobei K und L Constante. Die Bewegungsgleichungen des schwingenden Ions, ohne Dämpfung und ohne Erregung, sind dann:

$$K\mathfrak{m}_x + L\ddot{\mathfrak{m}}_x = 0, \ldots$$

Die Schwingungsdauer beträgt:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{K}}.$$

Ziehen wir nun die durch Energieemission verursachte Dämpfung in Betracht. Die Dämpfung bedingt in der Schwingungsgleichung ein Zusatzglied, sodass dieselbe lautet:

$$K\mathfrak{m}_x + L\ddot{\mathfrak{m}}_x + M\dddot{\mathfrak{m}}_x = 0, \ldots \tag{7}$$

Das letzte Glied entspricht der Dämpfung und ist bei angenäherter Periodicität klein gegen jedes der beiden ersten. Der Wert der positiven Constanten M ergiebt sich durch folgende Rechnung. Die in der Zeit T einer Schwingung verlorene Schwingungsenergie beträgt:

$$- \left[\frac{K}{2}(\mathfrak{m}_x^2 + \mathfrak{m}_y^2 + \mathfrak{m}_z^2) + \frac{L}{2}(\dot{\mathfrak{m}}_x^2 + \dot{\mathfrak{m}}_y^2 + \dot{\mathfrak{m}}_z^2)\right]_t^{t+T}$$

$$= - \int_t^{t+T} (K \mathfrak{m}_x \dot{\mathfrak{m}}_x + \ldots + L \dot{\mathfrak{m}}_x \ddot{\mathfrak{m}}_x + \ldots) \, dt$$

und nach (7):

$$= \int_t^{t+T} M(\dot{\mathfrak{m}}_x^2 + \ldots) \, dt .$$

Andererseits ist nach (5) die in der Zeit einer Periode emittirte Energie:

$$\tfrac{2}{3} \int_t^{t+T} \frac{dt}{V^3} (\ddot{\mathfrak{m}}_x^2 + \ldots),$$

oder durch partielle Integration:

$$- \tfrac{2}{3} \int_t^{t+T} \frac{dt}{V^3} (\dot{\mathfrak{m}}_x \dddot{\mathfrak{m}}_x + \ldots),$$

oder, da nach (7) angenähert:

$$\dddot{\mathfrak{m}}_x = - \frac{K}{L} \dot{\mathfrak{m}}_x .$$

$$\tfrac{2}{3} \int_t^{t+T} \frac{dt}{V^3} \frac{K}{L} (\dot{\mathfrak{m}}_x^2 + \ldots).$$

Da nun die Dämpfung nur durch die Emission bedingt sein soll, so ist dies zugleich auch die verlorene Schwingungsenergie, und daher:

$$M = \tfrac{2}{3} \cdot \frac{1}{V^3} \cdot \frac{K}{L} .$$

Die Schwingungsgleichung lautet mithin:

$$K \mathfrak{m}_x + L \ddot{\mathfrak{m}}_x + \frac{2K}{3 V^3 L} \dot{\mathfrak{m}}_x = 0, \ \ldots$$

Die ausdrücklich eingeführte Voraussetzung, dass das Dämpfungsglied klein sein soll gegen jedes der beiden anderen Glieder, erfordert, dass

$$K \text{ klein gegen } V^6 L^3 .$$

Wird endlich das Ion von aussen her zu Schwingungen angeregt, so kommt noch die Absorption von Energie hinzu, und damit vervollständigt sich die Schwingungsgleichung mit Rücksicht auf (6), wie leicht einzusehen, in folgender Weise:

$$K\,\mathfrak{m}_x + L\,\ddot{\mathfrak{m}}_x + \frac{2\,K}{3\,V^3\,L}\,\dot{\mathfrak{m}}_x = \mathfrak{F}_x, \;\ldots$$

Diese Gleichung stellt also die Bewegung eines nahezu elliptisch schwingenden Ions vor, welches seine Energie durch Strahlung emittirt und zugleich aus auffallender Strahlung Energie absorbirt. Sie ist eine Verallgemeinerung einer früher von mir auf anderem Wege für eine geradlinige Schwingung abgeleiteten Gleichung.[1])

1) M. Planck, Wied. Ann. **60.** p. 592. 1897.

(Eingegangen 20. Juli 1902.)