F. Borgnis: Zum Einfluß der Raumladung bei hohen Stromdichten auf die Fokussierung bei Laufzeitröhren.

Mit dem Bestreben, die Strahlstromdichte bei Laufzeitröhren zu steigern, gewinnt die Frage an Interesse, wie sich die Raumladung auf die Fokussierungsverhältnisse auswirkt. Bisher liegen wenig theoretische Betrachtungen zu diesem Problem vor. In einer kürzlich erschienen Arbeit 1) wurde versucht, einigen Einblick in die Verhältnisse zu gewinnen; zugrundegelegt sind dort einige vereinfachende Annahmen, die bei den praktisch verwendeten Röhrenanordnungen nicht durchwegs erfüllt sind. Diese Vereinfachungen rechtfertigen sich durch die Absicht, zunächst einmal an einem einfachen Beispiel den Einfluß der Raumladung zu studieren; es bereitet keine prinzipielle Schwierigkeit, die Rechnung in der gleichen Art unter erweiterten Voraussetzungen durchzuführen, allerdings unter einem erheblich größeren Rechenaufwand.

Betrachtet wird eine ebene, unendlich ausgedehnte Elektronenströmung, die mit der Geschwindigkeit v_0 in einen Steuerspalt S eintritt und im Spalt geschwindigkeitsmoduliert wird. Die elektrische Feldstärke E_0, die unmittelbar beim Austritt aus dem Steuerspalt auf die Elektronen wirkt, tritt als frei wählbare Größe in dem Problem auf; sie spielt die Rolle einer Integrationskonstante, die durch die äußeren Bedingungen im Laufraum bestimmt ist. E_0 wird gleich Null gesetzt; die Annahme entspricht derjenigen, die man an einer virtuellen Kathode (Langmuir-Kathode) zu machen pflegt. Denkt man sich den Laufraum durch den Auskoppler A begrenzt, so herrscht wegen der Raumladung zwischen S und A und der Grenzbedingung $E_0 = 0$ an der Stelle A ein bestimmtes Potential φ_A; man muß daher, um die angenommenen Verhältnisse zu realisieren, zwischen S und A eine Gleichspannung $U_g = \varphi_A - \varphi_S$ annehmen. Diese Spannung U_g hängt naturgemäß wieder von der Stromdichte j_0 des Elektronenstrahls ab; der Strahl ist also einer Nachbeschleunigung unterworfen, die von der Stromdichte abhängt.

Unter den angegebenen Voraussetzungen zeigt sich, daß eine kritische Stromstärke j_k existiert, bei deren Überschreitung eine Fokussierung im üblichen Sinn nicht mehr auftritt: Die Strahlelektronen können sich nicht mehr ein- und überholen.

---

1) F. Borgnis u. E. Ledinegg, Zur Theorie des dichtemodulierten Elektronenstrahls bei endlicher Stromdichte. Ann. d. Phys. (V) 42 (1943) S. 296 - 312.

Die kritische Stromdichte ergibt sich zu

$$j_k = 13{,}3\,\alpha^2\,\frac{U_0^{3/2}}{\lambda^2} \qquad [\mathrm{Amp/cm^2}] \qquad (1)$$

(α Aussteuerung, U_0 Beschleunigungsgleichspannung des Strahls zwischen Kathode und Steuerspalt, λ Wellenlänge in cm). Beispielsweise folgt für U_0=1600 Volt, λ= 20 cm, α = 0,1 eine Stromdichte j_k = 15 mA/cm^2. Die Werte von j_k liegen verhältnismäßig niedrig. Es liegt die Vermutung nahe, daß hieran u.a. die der Rechnung zugrunde liegende Voraussetzung eines unendlich ausgedehtnten Strahles schuld ist. In Wirklichkeit hat man es ja stets mit endlichen und meist mit relativ geringen Strahlquerschnitten zu tun. Um über den Einfluß der endlichen Ausdehnung des Strahls auf die Raumladungswirkung ein Bild zu gewinnen, wurde das folgende Problem behandelt:[2)]

Zwischen zwei auf gleichem Potential befindlichen unendlich ausgedehnten leitenden Ebenen A und B befindet sich eine homogene, kreiszylindrische Raumladung mit der Dichte ρ_0 (Coul/cm^3); der Abstand der Ebenen sei d, der Durchmesser des Strahls 2R (Abb. 1) Gesucht ist die Potential- und Feldverteilung im Raum zwischen den beiden Ebenen. Dieser Fall entspricht angenähert einem kurzgeschlossenen Laufraum (A-B), den ein kreiszylindrischer Elektronenstrahl hoher Geschwindigkeit v_0 durchsetzt. Ist die Geschwindigkeit v_0 so groß, daß die Raumladungskräfte im Strahl keine wesentliche Beschleunigung bzw. Verzögerung der Strahlelektronen zur Folge haben, so kann die Dichte ρ in guter Annäherung als konstant über den Laufraum angesehen werden. (Eine Abschätzung zeigt, daß ρ in erster Näherung konstant betrachtet werden kann, solange gilt:

$$j_0 \ll 4{,}21\cdot10^{-5}\,\frac{U_0^{3/2}}{d^2}\,, \qquad (2)$$

jo Stromdichte in Amp/cm^2, U_0 Voltgeschwindigkeit der Strahlelektronen beim Eintritt in den Laufraum AB, d Abstand A-B. Z.B. folgt für U_0 = 1600 Volt, d = 1 cm: $j_0 \ll$ 2,7 Amp/cm^2).

2) F.Borgnis, Zur Elektrostatik des Elektronenstrahls von kreisförmigem Querschnitt. Im Erscheinen in den Annalen d.Physik.

Einen Aufschluß über die Abschwächung der Raumladungswirkung mit abnehmendem Strahlquerschnitt liefert z.B. der Verlauf des elektrischen Feldes längs der Strahlachse (r = 0) zwischen den Ebenen AB in Abhängigkeit von dem Verhältnis Strahlradius R zu Ebenenabstand d. Für den unendlichen Strahlquerschnitt ($R/d = \infty$) ergibt sich bekanntlich der Feldverlauf längs des Strahls aus der Raumladungsgleichung (im praktischen Massystem)

$$\varepsilon \frac{dE}{dx} = \rho_0 ;$$

unter Beachtung der Symmetriebedingung $E_A = - E_B$ (d.h. der Spannung Null zwischen A und B) zu

$$E_{r=0} = \frac{\rho_0}{2\varepsilon}(d - 2x), \qquad (3)$$

d.h. die Feldstärke besitzt nur eine axiale Komponente und nimmt linear von der Elektrode A nach der Elektrode B hin ab. Der Strahl findet also beim Eintritt an A eine Gegenfeldstärke $E_A = \rho_0 d/2\varepsilon$ vor und wird bis zur Mitte zwischen A und B verzögert; über der Mitte wirkt das Feld beschleunigend bis zur Elektrode B. Den Einfluß eines endlichen Strahlquerschnittes auf den Verlauf des Feldes zwischen A und B längs der Strahlachse zeigt nun Abb. 2. Aufgetragen ist die axiale Feldstärke E_{xo} als Funktion von x/d; x ist die laufende Koordinate zwischen den Ebenen A und B. Als Parameter ist das Verhältnis R/d gewählt. Man sieht, wie mit abnehmendem Strahlquerschnitt (R/d) die durch die Raumladung erzeugte Feldverteilung herabgemindert wird. Die Gerade mit $R/d = \infty$ entspricht dem unendlich ausgedehnten Strahl. Quantitativ kann man sagen, daß noch für R/d = 1 die Verteilung wenig vom Fall $R/d = \infty$ abweicht. Als Abschätzung kann man daher aussagen, daß für "breite" Strahlen ($R/d > 1$) das ebene Problem eine gute Annäherung liefert; bei "dünnen" Strahlen ($R/d < 1$) ist die Raumladungswirkung jedoch u.U. erheblich abgeschwächt. Abb. 3 zeigt nochmals die schon aus Abb. 2 ersichtliche Gegenfeldstärke E_A an der Elektrode A (mit E_{oo} wegen x = r = 0 bezeichnet) als Funktion von R/d. Der analytische Ausdruck dafür lautet

$$E_{oo} = \frac{\rho_0 d}{2\varepsilon}\left(1 + \frac{4R}{d} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2m+1} H_1^{(1)}\left(\frac{j(2m+1)\pi R}{d}\right)\right). \qquad (4)$$

($H_1^{(1)}$ Hankel'sche Funktion).

Den Verlauf der elektrischen Feldlinien im Raum zwischen den Ebenen A und B zeigen die Abb. 4 und 5 für zwei Fälle, einen breiten Strahl ($R/d = 1$) und einen dünnen Strahl ($R/d = 1/12$). Im breiten Strahl herrscht bis auf die Randzonen praktisch das Feld, wie es der unendlich ausgedehnte Strahl liefert; im Strahlinnern herrscht praktisch nur eine axiale Feldstärke, die erst in der Nähe der Mittellinie etwas in die radiale Richtung umbiegt; die Intensität des Feldes in der Umgebung der Mittellinie ist nahe Null. Anders der Feldverlauf im dünnen Strahl: Axiale Feldstärken herrschen praktisch nur in der Umgebung der Achse; die weiter außen liegenden Zonen sind in der Hauptsache radialen Kräften ausgesetzt. Eine defokussierende Raumladungswirkung wird sich daher im wesentlichen nur bei den in der Strahlachse fliegenden Elektronen bemerkbar machen; die weiter außen fliegenden Elektronen werden durch die radialen Kräfte aufgespreizt; diesem Effekt kann durch ein Magnetfeld begegnet werden. Bei dünnen Strahlen wird sich eine Störung der Fokussierung durch die Raumladung also praktisch nur bei den Achsenstrahlen bemerkbar machen und hier bei geringeren Werten von R/d nur sehr geschwächt. Für nicht zu große Strahldurchmesser ist demnach eine schädliche Wirkung der Raumladungskräfte weit weniger zu befürchten, als es nach den Ergebnissen theoretischer Betrachtungen für einen unendlich ausgedehnten Strahl den Anschein hat.

Überlegungen gleicher Art sind naturgemäß auch für verwandte Problemstellungen gültig. Z.B. wird in dem behandelten Fall des kurzgeschlossenen Laufraums die kritische Umkehrstromstärke bei endlichem Querschnitt höher liegen, als die Rechnung für das ebene Problem ergibt. Tritt ein Elektronenstrahl mit der Voltgeschwindigkeit U_0 und der Stromdichte j_0 in den Raum zwischen zwei auf gleichem Potential liegenden Ebenen A und B ein, so existiert bekanntlich eine Stromdichte j_u (Umkehrstromdichte), bei der die den Strahl verzögernden Raumladungskräfte so groß werden, daß ein Teil der Elektronen im Laufraum umkehrt und zur Elektrode A zurückfliegt; in der Laufraummitte bildet sich eine virtuelle Kathode aus. Das ebene Problem liefert für j_u die Beziehung: 3)

$$j_u = \frac{32}{9} \varepsilon_0 \sqrt{\frac{2e}{m}} \cdot \frac{U_0^{\frac{3}{2}}}{d_k^2} \qquad (5a)$$

oder

$$j_u = 1{,}85 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{U_0^{\frac{3}{2}}}{d_k^2}\,; \qquad (5b)$$

(d_k kritischer Elektrodenabstand, bei dem bei einer Stromdichte j_u Elektronenumkehr eintritt).

Für j_u = 500 mA/cm² und U_0= 1600 Volt folgt z.B. d_k= 1,6 cm. Mit abnehmendem Strahlquerschnitt wird analog zu den vorausgegangenen Betrachtungen die Umkehrstromdichte bei gegebenem Elektrodenabstand d_k ansteigen und für dünne Strahlen erheblich höher liegen, als die Beziehung für das ebene Problem nach (5) angibt.

Zusammenfassend kann man sagen, daß bei relativ geringen Strahlquerschnitten die Raumladungswirkungen weitgehend geringer sind, als Betrachtungen über Elektronenströmungen, die als ebenes Problem behandelt sind, erwarten lassen; für breite Strahlen hingegen liefert das ebene Problem eine gute Annäherung.

---

3) Plato, Kleen u. Rothe, Die Raumladegleichung für Elektronen mit Anfangsgeschwindigkeit. Z.f.Phys. 101 (1936) S.509 - 520.

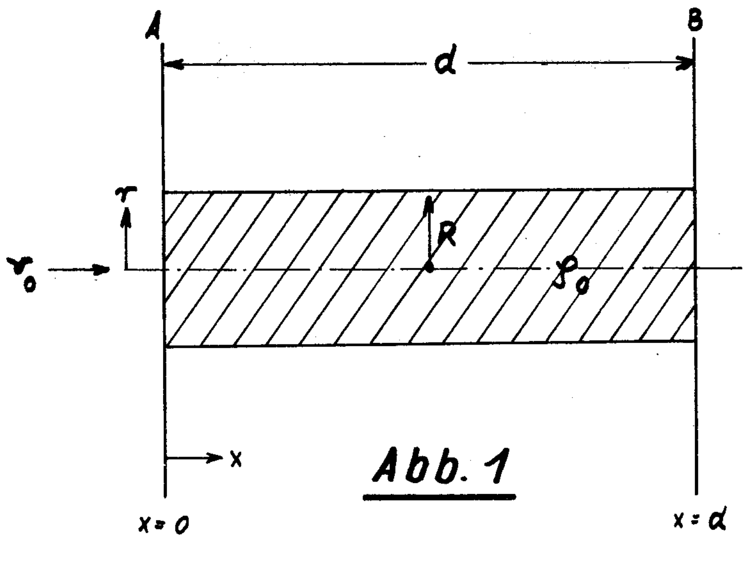

Abb. 1

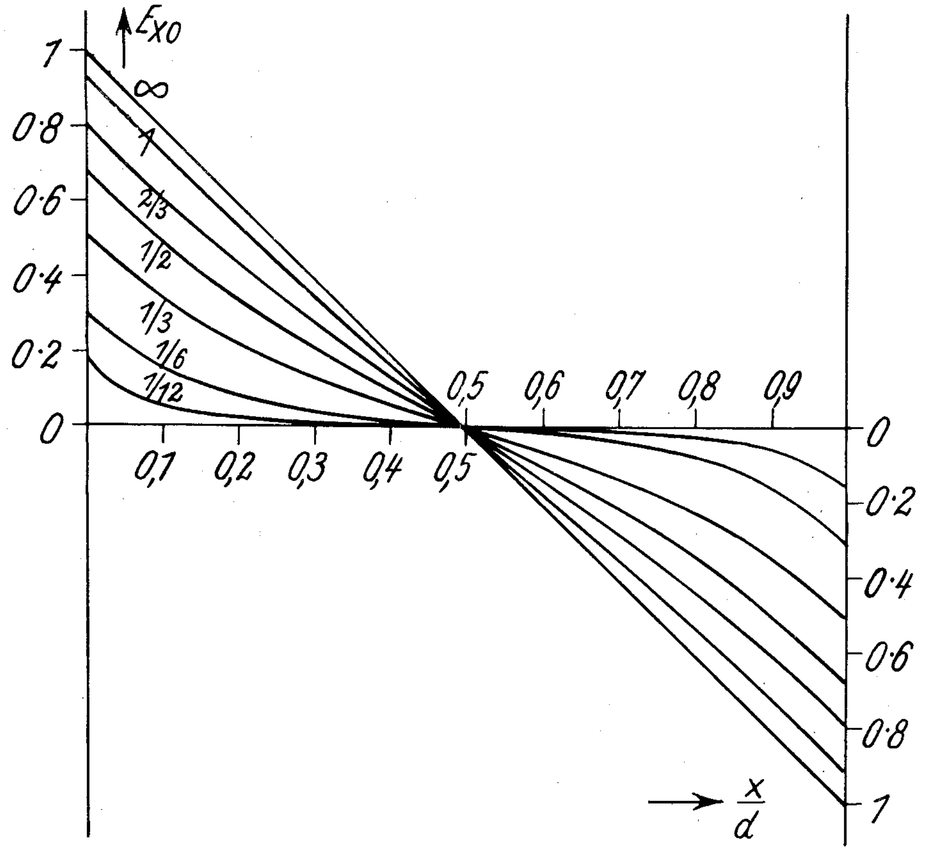
E_{x0}
1
0·8
0·6
0·4
0·2
0
∞
1
2/3
1/2
1/3
1/6
1/12
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
0
0·2
0·4
0·6
0·8
1
x/d

Abb.: 2

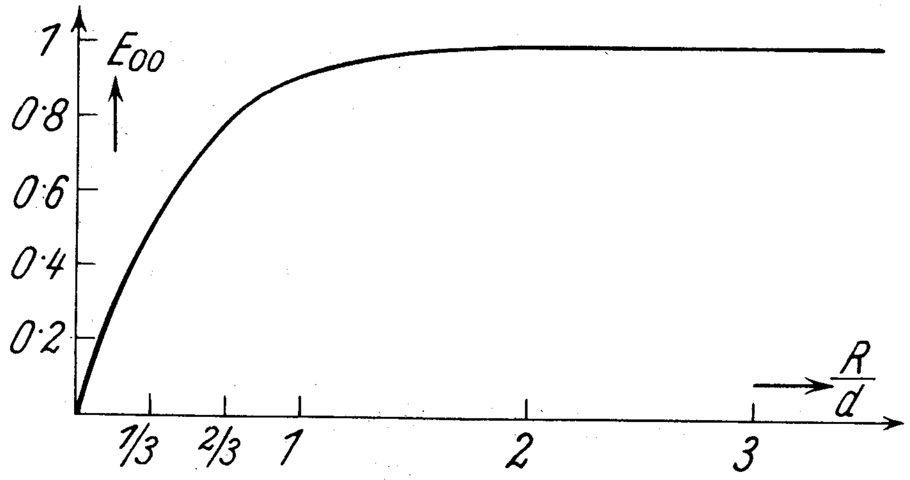
1
0·8
0·6
0·4
0·2
E_{00}
1/3
2/3
1
2
3
R/d

Abb.: 3

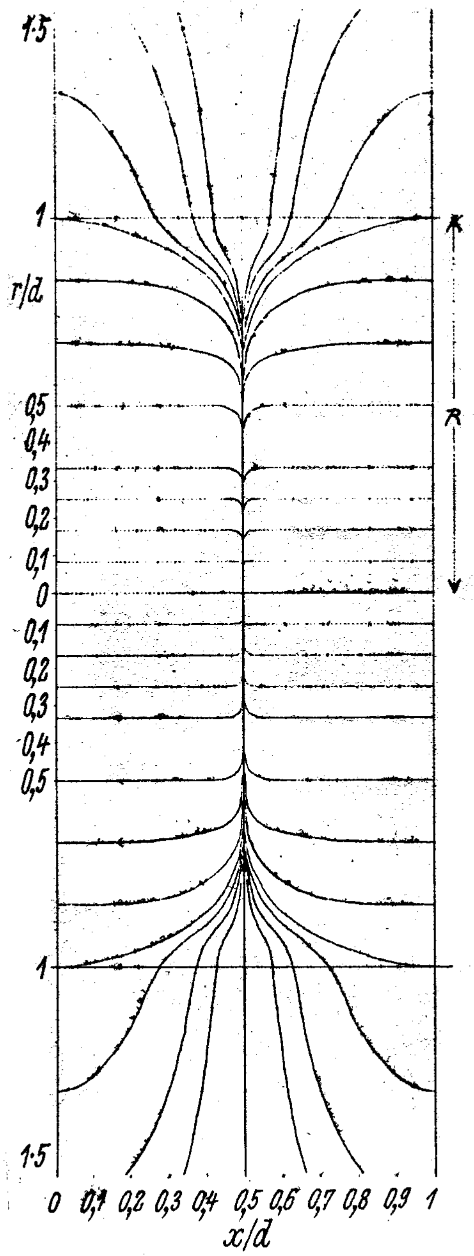
1·5
1
r/d
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
1
1·5
R
0 0,1 0,2 0,3 0,4 0,5 0,6 0,7 0,8 0,9 1
x/d

Abb.: 4

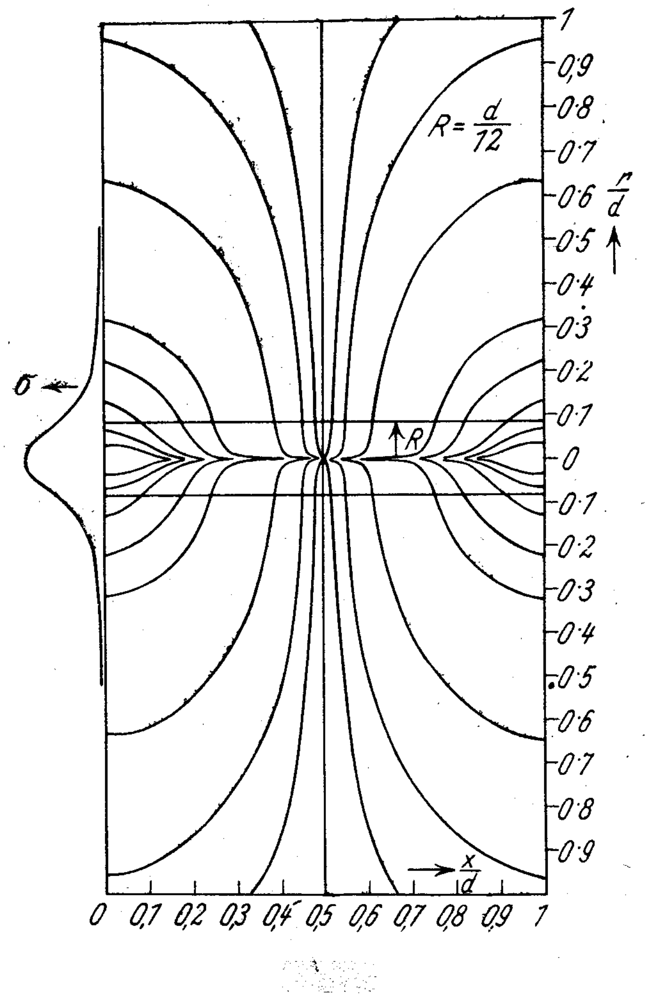
σ
R = d/72
R
1
0,9
0·8
0·7
0·6
0·5
0·4
0·3
0·2
0·1
0
0·1
0·2
0·3
0·4
0·5
0·6
0·7
0·8
0·9
r/d
x/d
0 0,1 0,2 0,3 0,4 0,5 0,6 0,7 0,8 0,9 1

Abb.: 5