

# Piezoelektrische Kristalle als Frequenznormale.

(Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.)

Von E. Giebe und A. Scheibe.

## 1. Einleitung.

Hochfrequente elastische Schwingungen von piezoelektrischen Kristallen, besonders des Quarzes, haben in den letzten Jahren sowohl für physikalische Untersuchungen als auch in der Technik vielfach Anwendung gefunden. Durch elektrische Wechselfelder lassen sich vermöge des reziproken Piezoeffektes elastische Schwingungen von Stäben oder Platten aus Quarz bis zu sehr hohen Frequenzen (Größenordnung  $10^7$  Hz) in einfacher Weise erregen und auf Flüssigkeiten oder Gase übertragen; sie zeichnen sich durch außerordentlich geringe Dämpfung aus und können deshalb bei geringer Anregungsenergie durch Resonanz große Amplituden erreichen.

Stäbe oder Platten aus Quarz sind sehr selektive Resonatoren und stellen, in ihren elastischen Eigenfrequenzen angeregt, äußerst präzise Frequenznormale dar, die zeitlich unveränderlich und wenig von der Temperatur abhängig sind. Sie entsprechen, sei es als Resonatoren oder in Verbindung mit Elektronenröhren als sogenannte Oszillatoren, dem in den letzten Jahren dringend hervorgetretenen Bedürfnis nach genauer und dabei einfacher Frequenzmessung oder Frequenzsteuerung von Röhrensendern in vorzüglicher Weise.

Bisher sind bei allen piezoelektrischen Resonatoren und Oszillatoren ausschließlich longitudinale Schwingungen (Dehnungsschwingungen) benutzt. Im folgenden wird gezeigt werden, auf welche Weise sich auch transversale und Torsions-Schwingungen (Biegungs- und Drillungsschwingungen) piezoelektrisch anregen lassen. Dabei ergaben sich Aufschlüsse über die mit elastischen Schwingungen von Quarzstäben verknüpften piezoelektrischen Phänomene und über die Gesetze der hochfrequenten Eigenschwingungen. Auch für die praktische Meßtechnik dürften transversale und Torsions-Schwingungen von Nutzen sein, u. a. deshalb, weil der Frequenzbereich, in welchem piezoelektrische Resonatoren als Frequenznormale Anwendung finden können,

durch Benutzung dieser beiden Schwingungsarten erheblich erweitert wird.

## 2. Orientierung der Quarzstäbe zu den Kristallachsen.

Die Untersuchungen sind hauptsächlich an Quarzstäben mit rechteckigem oder quadratischem Querschnitt ausgeführt. Die Orientierung der Kanten dieser rechtwinkligen Parallelepipede beziehen wir auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem, dessen Lage in bezug auf die Kristallachsen die folgende ist: Abb. 1 stelle einen senk-

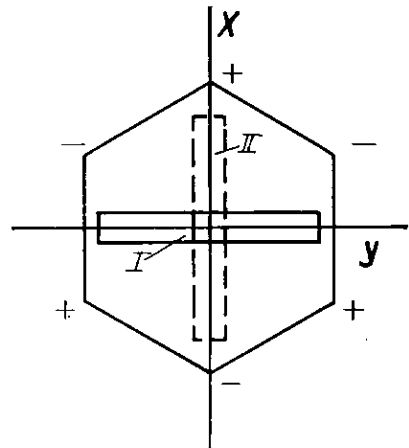


Abb. 1. Orientierung der Quarzstäbe zu den Kristallachsen.

recht zur Haupt- oder optischen Achse eines hexagonalen Bergkristallprisma gelegten Querschnitt dar. Wir bezeichnen die optische Achse des Kristalls als Z-Achse unseres Koordinatensystems, eine der drei um  $120^\circ$  gegeneinander versetzten Neben- oder elektrischen Achsen, die durch die Ecken des Sechsecks laufen, als X-Achse oder, besser gesagt, die Richtungen dieser beiden Kristallachsen als Z- bzw. X-Richtung. Die dritte Achse unseres Systems, die Y-Achse, steht senkrecht auf den beiden anderen Achsen. Die Kanten der untersuchten Stäbe liefen stets parallel zu den Koordinatenachsen, die Stablänge oder Stabachse lag stets senkrecht zur Z-Achse und fiel entweder in die Richtung

der  $Y$ - oder in die der  $X$ -Achse. Wir bezeichnen diese beiden Stabachsenlagen im folgenden als Orientierung I bzw. II. Bisher wurde in der Regel bei stabförmigen Resonatoren die Orientierung I benutzt. Die Abmessungen der Stäbe in Richtung der drei Koordinatenachsen bezeichnen wir mit  $x, y, z$ ; die Querdimensionen waren meist klein gegenüber der Stablänge, z. B.  $x = 1,5$ ,  $y = 80$ ,  $z = 3$  mm, doch wurden die Untersuchungen bis zu sehr hohen Oberschwingungen ausgeführt, bei denen die Halbwellenlängen der erzeugten stehenden elastischen Welle von gleicher Größenordnung wie die Querdimensionen des Stabes waren.

Neben Stäben der beschriebenen Art wurde auch ein solcher mit kreisförmigem Querschnitt (Durchmesser 3 mm) der Stabachsenorientierung II untersucht. Endlich wurden noch Untersuchungen mit Kreisringen aus Quarz ausgeführt; die Ebene der Ringe stand senkrecht auf der optischen Achse, der Ringquerschnitt war rechteckig.

### 3. Der Piezoeffekt bei Schwingungen. Raumladungen.

Bei statischen Deformationen besteht der Piezoeffekt bekanntlich in folgendem: Komprimiert man einen Quarzstab in der Orientierung I oder II, etwa durch Aufsetzen von Gewichten, in Richtung der  $X$ - oder der  $Y$ -Achse, so treten auf den beiden zur  $X$ -Achse senkrechten Stabebenen entgegengesetzt gleiche Flächenladungen in gleichmäßiger Verteilung auf. Läßt man umgekehrt ein homogenes elektrisches Feld in Richtung der  $X$ -Achse auf den Stab einwirken, so tritt eine Kontraktion (oder Dilatation) in der  $X$ -Richtung und eine Dilatation (oder Kontraktion) in der  $Y$ -Richtung ein. Beide Wirkungen unterscheidet man als direkten und reziproken Piezoeffekt. Drucke bzw. elektrische Felder in Richtung der optischen Achse haben keine elektrische bzw. deformierende Wirkung. Bei den ungleichförmigen Deformationen, wie sie mit Schwingungen verknüpft sind, ändert sich die Größe der Deformation außer mit der Zeit auch von Ort zu Ort, demgemäß auch die Ladung je Flächeneinheit, und zwar, wie die Deformationen, nach dem Sinusgesetz. Außerdem treten aber bei ungleichförmigen Deformationen, wie durch die folgenden Versuche experimentell erwiesen wird, neben Flächenladungen auch Raumladungen

auf. Die Entstehungsweise solcher Raumladungen mag durch folgende Überlegungen anschaulich gemacht werden. Ein Quarzstab der Orientierung II, bei der also die elektrische Achse in die Stabachse fällt, werde in seiner longitudinalen Grundschiwingung erregt; auf welche Weise dies geschehen kann, wird in Abschn. 6 erläutert. Wir denken uns den Stab durch senkrecht zur Stabachse ausgeführte Schnitte in eine große Anzahl Scheiben der Dicke  $dx$  geteilt und wählen  $dx$  so klein, daß längs  $dx$  die Deformation als konstant angesehen werden kann. Der in der Stabmitte, also im Deformationsbauch befindlichen Scheibe geben wir die Nummer 0 und nummerieren die in der positiven bzw. negativen Richtung folgenden Scheiben fortlaufend mit  $+1, +2, \dots$  bzw.  $-1, -2, \dots$ . Für jede der Scheiben ist dann die Deformation eine andere, sie ändert sich vom Maximum an der mittelsten Scheibe bis auf 0 an den beiden Endscheiben nach dem Sinusgesetz; entsprechend ändert sich die Größe der Ladungen, die, wie bei statischen Deformationen, auf den beiden zur  $X$ -Achse senkrechten Flächen entstehen würden, wenn jede Scheibe für sich deformiert würde. Die nach der positiven bzw. negativen  $X$ -Richtung gelegenen Flächen der Scheiben mögen die Ladungen  $+e_0, +e_1, +e_2 \dots$  bzw.  $-e_0, -e_1, -e_2 \dots$  erhalten, wobei also  $\pm e_0 > \pm e_1 > \pm e_2 \dots$  ist. Im wirklichen, d. h. unzerschnittenen Stab liegen nun die entgegengesetzt geladenen Flächen der gedachten Scheiben unmittelbar aufeinander, die Ladungen  $\pm e_0, \pm e_1, \pm e_2 \dots$  einer Scheibe können daher durch die Ladungen  $\mp e_1, \mp e_2, \mp e_3$  der nächstfolgenden Scheiben, weil die letzteren Ladungen kleiner sind, nicht vollständig kompensiert werden, so daß an den Berührungsflächen der aufeinanderfolgenden Scheiben 0,  $+1, +2$  usw. bzw. 0,  $-1, -2$  usw. ein Überschuß von positiver bzw. negativer Ladung übrigbleibt. Der Überschuß wird um so größer, je größer der Unterschied in der Deformation benachbarter Scheiben ist, nimmt also von der Stabmitte nach den Stabenden hin zu, wo der Deformationsunterschied benachbarter Scheiben am größten ist. Da die Begrenzungsflächen der gedachten Scheiben im Stabinnern liegen, so resultieren für jedes Volumenelement des Stabes Ladungen, „Raumladungen“, die sich, bei unendlich kleiner Scheibendicke, stetig längs des Stabes nach dem Sinusgesetz ändern. Sie

sind also bedingt durch die Änderung der Deformation längs des Stabes und erreichen ihr Maximum da, wo die Deformation ihr Minimum hat, d. h. sind um  $\frac{1}{4}$  Wellenlänge gegenüber der Deformation verschoben. Die in Abschn. 6 näher zu besprechenden Photographien in Abb. 3 II lassen deutlich Raumladungen erkennen<sup>1)</sup>.

#### 4. Methoden zur Feststellung der Resonanz zwischen elektrischen und elastischen Schwingungen.

Um durch den reziproken Piezoeffekt elastische Schwingungen von merkbarer Amplitude zu erzwingen, muß man die Frequenz des erregenden Wechselfeldes gleich einer der elastischen Eigenfrequenzen des Kristallstabes machen, also Resonanz herstellen. Alle Methoden zur Feststellung der Resonanz beruhen darauf, daß durch die Deformationen, welche der primär durch den reziproken Piezoeffekt zu Schwingungen angeregte Kristall erleidet, sekundär vermöge des direkten Piezoeffektes Ladungen entstehen. Diese Ladungen, deren Maximalwert den Resonanzpunkt angibt, können auf verschiedene Weise beobachtbar gemacht werden; bei den vorliegenden Versuchen sind die beiden folgenden Methoden a und b angewandt. Die elektrische Schaltung ist in beiden Fällen die gleiche. Die das elektrische Feld im Kristall erzeugenden Elektroden werden an eine aus zwei Spulen bestehende Selbstinduktion angeschlossen, deren Größe der jeweiligen Frequenz einigermaßen angepaßt ist. Die eine Spule wird mit einem Röhrensender regelbarer Frequenz gekoppelt, die zweite mit einem Detektorkreis, der Lautverstärker und Telephon enthält.

a) Akustische Methode nach Cady<sup>2)</sup>. Ändert man die Senderfrequenz (nicht allmählich, sondern schnell) in der Nähe der Resonanz zwischen elektrischen und elastischen Schwingungen, so hört man im Telephon, wenn man den Resonanzpunkt überschreitet, einen kurz anklingenden Schwebungston. Die elektrischen Schwingungen, die durch die sekundären piezoelektrischen Ladungen des mit seiner Eigenfrequenz ausschwingenden Quarzes erzeugt werden, überlagern sich dabei mit den elektrischen

Schwingungen des Röhrensenders und interferieren, da beide Schwingungen verschiedene Frequenz haben. Die Methode ist für das Auffinden der Resonanz vorzüglich, zur genauen Einstellung weniger geeignet und gestattet nicht die Ordnungszahl der Schwingung und die Schwingungsart (ob longitudinale, transversale oder Torsionsschwingung) zu erkennen.

b) Optische Methode von Giebe und Scheibe<sup>3)</sup>. Der Piezoquarz wird mit seinen Elektroden im Vakuum von einigen Zehntel bis zu einigen Millimetern Gasdruck angeordnet. Die sekundären piezoelektrischen Ladungen erzeugen dann leuchtende Glimmentladungen, wenn die elastischen Schwingungen bei Resonanz mit den elektrischen eine große Amplitude erreichen. Man stellt mit großer Genauigkeit auf die maximale Leuchtstärke oder noch besser auf die Mitte des Frequenzintervalls ein, innerhalb dessen das Leuchten bestehen bleibt. Der große Vorzug dieser Methode besteht darin, daß man aus dem Aussehen der Leuchtfiguren die Art und die Ordnungszahl der erregten Schwingung unmittelbar ablesen kann. Aus diesem Grunde war die Methode das wesentlichste Hilfsmittel für die vorliegenden Untersuchungen, ohne dieselbe wäre es sehr mühsam gewesen oder kaum gelungen, das elastische Spektrum der zahlreichen Eigenschwingungen eines Quarzstabes mit Sicherheit zu entwirren. Diese „leuchtenden, piezoelektrischen Resonatoren“ eignen sich ferner deshalb besonders gut als Frequenznormale, weil keine Meßinstrumente zur Beobachtung und keine anderweitigen Hilfsmittel, Verstärker, Heiz- und Anodenbatterien, wie bei piezoelektrischen Oszillatoren, erforderlich sind.

Bei mittleren und niedrigen Frequenzen im hörbaren Bereich, etwa unterhalb 15 000—20 000 Hz, wie sie bei den transversalen Eigenschwingungen kleiner Ordnungszahl vorkommen, versagt die erste Methode, die zweite bleibt anwendbar. Für nicht im Vakuum angeordnete Resonatoren kann man hier das Einsetzen der Resonanz auch unmittelbar mit dem Ohr beobachten. Im übrigen kann man die Lage der Eigenfrequenzen nach den in Abschn. 10 angegebenen Formeln für einen gegebenen Stab mit ziemlicher Sicherheit vorausberechnen.

<sup>1)</sup> Zur mathematischen Theorie des Piezoeffektes bei Schwingungen der verschiedenen Arten siehe E. Giebe und A. Scheibe, ZS. f. Phys., 46, S. 607, 1928.

<sup>2)</sup> W. G. Cady, Proc. Inst. Rad. Eng., 10, S. 83, 1922.

<sup>3)</sup> E. Giebe u. A. Scheibe, ZS. f. Phys. 33, S. 335, 1925.

### 5. Allgemeine Grundsätze für die piezoelektrische Anregung der drei Schwingungsarten.

Zum Verständnis der Anregungsbedingungen, die für die drei Schwingungsarten und für beide Staborientierungen I und II in den Abschnitten 6 bis 9 einzeln erläutert werden sollen, ist wohl zu beachten, daß zur Anregung von Dehnungs- und Biegungsschwingungen nur die in die Richtung der elektrischen ( $X$ -) Achse fallenden Komponenten der einen Quarzkristall durchsetzenden elektrischen Felder in Betracht kommen. Die bei Torsionsschwingungen wirksamen Feldkomponenten werden in Abschn. 9 besprochen. Am einfachsten ist die Erregung longitudinaler Schwingungen, weil man hier ein zwischen zwei Kondensatorplatten oder Elektroden verlaufendes homogenes oder doch nahezu homogenes elektrisches Wechselfeld auf den Stab in der  $X$ -Richtung einwirken lassen kann. Zur Erregung von transversalen und Torsionsschwingungen hingegen muß man inhomogene Wechselfelder anwenden. Die Elektroden, an welche die felderzeugende Wechselspannung gelegt wird, sind hier so anzuordnen, daß im Kristall ein bezüglich Stärke oder Richtung oder in beiden Beziehungen örtlich sich änderndes elektrisches Wechselfeld entsteht, dessen Ungleichförmigkeit je nach Schwingungstyp und Staborientierung von ganz bestimmter Art sein muß. Zur Erzeugung von Feldern dieser Art braucht man im allgemeinen mehr als zwei Elektroden; dadurch werden die Anordnungen bei transversalen und Torsionsschwingungen etwas komplizierter als bei longitudinalen. Damit aus den periodischen Biegungen oder Drillungen Schwingungen von merklicher Amplitude entstehen, muß man natürlich, entsprechend wie bei den Dehnungsschwingungen, die Frequenz der erregenden Wechselspannung gleich einer der transversalen oder Torsions-Eigenschwingungen des Kristallstabes machen, also Resonanz herstellen, so daß sich längs des Stabes stehende elastische Wellen ausbilden. Diese Resonanzabstimmung wird im folgenden immer stillschweigend vorausgesetzt.

Die in den Abb. 2, 7, 9 und 13 skizzierten Anordnungen beziehen sich auf Quarzstäbe der in Abschn. 2 angegebenen Form und Orientierung. Für die transversalen Schwingungen kommen bei rechteckigem Stabquerschnitt drei verschiedene Schwingungsrichtungen, nämlich die

Richtungen der drei Koordinatenachsen, in Betracht. Für die drei Schwingungsarten und die beiden Staborientierungen ergeben sich so im ganzen acht verschiedene Anordnungen, von denen jede in den Abbildungen in Aufsicht (Buchstabe  $a$ ) und Querschnitt (Buchstabe  $b$ ) dargestellt ist. Die für die beiden Staborientierungen I und II bei gleicher Schwingungsart benutzten Anordnungen sind untereinander gesetzt. Die Richtung der Koordinatenachsen ist jeweils daneben eingezeichnet. Die mit dem gleichen Polaritätszeichen  $+$  oder  $-$  versehenen Anregungselektroden  $E_1, E_2, E_3, E_4$  sind miteinander und mit dem einen bzw. anderen Pol der Wechselspannung verbunden zu denken. Ferner ist der Verlauf der elektrischen Feldlinien im Quarz  $Q$  andeutungsweise eingezeichnet. Pfeile an den Feldlinien geben die Richtung der wirksamen Feldkomponenten an. Für die Staborientierung II ist die verschiedene Richtung der den Stabquerschnitt senkrecht durchsetzenden elektrischen Feldlinien (Schnitte  $b$  der Abb. 2, 7, 9) durch die Zeichen  $+$  und  $-$  gekennzeichnet.

Was die Abmessungen der Elektroden betrifft, so ist deren eine durch die Größe des Stabquerschnittes gegeben. Durch Vergrößerung der Elektrodenlänge in Richtung der Stabachse kann man — bei konstanter Wechselspannung an den Elektroden — eine Steigerung der Amplitude der zu erzeugenden elastischen Schwingung nur dann erzielen, wenn dadurch die Gesamtzahl der für die jeweils notwendige Deformation wirksamen elektrischen Feldlinien vergrößert wird, also z. B. bei Erregung longitudinaler und transversaler Schwingungen nach Abb. 2, I bzw. 7, I. Eine Amplitudensteigerung wird jedoch auch hier nur erzielt, solange die Elektrodenlänge die Halbwellenlänge der entstehenden elastischen Welle nicht überschreitet. Man kann zwar mit Elektroden, deren Länge gleich der Stablänge ist, in der Anordnung Abb. 2, I alle ungeradzahlig longitudinalen Oberschwingungen anregen<sup>4)</sup>, jedoch ist für die Energieübertragung auf den Quarzstab immer nur der Teil der Elektrodenlänge wirksam, der gleich einer Halbwellenlänge der jeweiligen Oberschwingung ist, also nur bei der Grundschwingung die ganze Elektrodenlänge. Dies folgt aus den gleichen Gründen, die es unmöglich machen, geradzahlige longitudinale

<sup>4)</sup> E. Giebe u. A. Scheibe, a. a. O.

Oberschwingungen mit Elektroden anzuregen, deren Länge gleich der Stablänge ist. Bei einer geradzahligten Oberschwingung, z. B.  $k = 2$ , müßte nämlich das elektrische Feld solcher Elektroden, das längs des ganzen Stabes die gleiche Richtung hat, im gleichen Zeitmoment in beiden Stabhälften entgegengesetzt gleiche Deformationen hervorrufen, was, völlige Symmetrie vorausgesetzt, nicht möglich ist. Praktisch genügen übrigens meist sehr kurze Elektroden, z. B. für longitudinale Schwingungen in Anordnung 2, I Elektrodenlängen von 2 mm bei 80 mm Stablänge, um Grund- und zahlreiche Oberschwingungen so kräftig anzuregen, daß im Vakuum nach Abschn. 4 das Leuchten des Resonators einsetzt.

Bei anderen der 8 Anordnungen, bei denen Streulinien des elektrischen Feldes die wirksamen sind, z. B. bei den Anordnungen 2, II, 7, II, 9, II, kann man durch Elektrodenverlängerung auch bei Schwingungen niedrigster Ordnung keine Amplitudensteigerung erzielen; die geeignete Bemessung des Abstandes der Elektroden  $E_1$  und  $E_2$  bzw.  $E_3$  und  $E_4$ , der außerdem — besonders bei hohen Oberschwingungen — im richtigen Verhältnis zur elastischen Halbwellenlänge stehen muß, ist hier maßgebend für die Größe der Schwingungsamplitude bei konstanter Erregungsspannung.

Die Lage der Elektroden relativ zum Stab wählt man zweckmäßig so, daß die Feldintensität am Deformationsbauch der zu erzeugenden Schwingung am größten ist, also z. B. bei den Anordnungen Abb. 2, I und 7, I für alle ungeradzahligten Oberschwingungen, bei denen der Deformationsbauch immer in der Stabmitte liegt, so, daß die Elektrodenmitten der Stabmitte gegenüber liegen. Bei einigen der Vier-Elektrodenanordnungen, z. B. Abb. 2, II und 7, II, hingegen setzt man die Elektrodenpaare  $E_1$  und  $E_2$  sowie  $E_3$  und  $E_4$  am zweckmäßigsten symmetrisch zu einem Deformationsbauch, also bei ungeradzahligten Oberschwingungen symmetrisch zur Stabmitte. Für die übrigen Anordnungen gelten die entsprechenden Überlegungen. Bei zunehmenden Abweichungen von der günstigsten Lage zwischen Stab und Elektroden werden die Schwingungsamplituden immer kleiner und sinken auf Null herab, wenn der Stab um  $\frac{1}{4}$  Wellenlänge aus der günstigsten Lage verschoben ist. Für die Erregung geradzahligter Oberschwingungen muß man also jedesmal den Stab in die richtige, mit

der Ordnungszahl sich ändernde Lage verschieben. Doch kann man praktisch eine mittlere relative Lage von Stab zu Elektroden finden, in welcher viele gerad- und ungeradzahligte Oberschwingungen anregbar sind, wenn auch nicht alle mit gleicher Intensität, und nur einzelne überhaupt nicht. Übrigens findet man experimentell die günstigste Lage sehr einfach, indem man bei Anwendung der Methoden a und b des Abschn. 4 die Zu- oder Abnahme in der Intensität des Schwebungstones bzw. des Glimmlichtes bei allmählichem Verschieben des Stabes zwischen den Elektroden

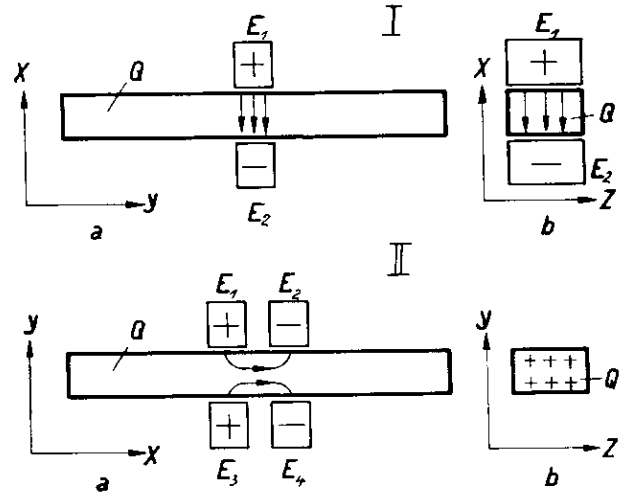


Abb. 2. Erregung longitudinaler Schwingungen.

beobachtet. Dazu muß der Stab auch im Vakuum leicht verschiebbar angeordnet sein; er lag bei unseren Versuchen in einem evakuierten Glasrohr auf einer glatten Unterlage (vgl. auch Abschnitt 10). Durch leichtes Klopfen am etwas geneigten Rohr konnten Stabverschiebungen leicht bewirkt werden.

## 6. Erregung longitudinaler Schwingungen.

Abb. 2, I stellt die bisher meist übliche Anordnung für Quarzstäbe in der gewöhnlich benutzten Orientierung I dar. Das zwischen den beiden Elektroden  $E_1$  und  $E_2$  verlaufende, den Quarz  $Q$  in der  $X$ -Richtung durchsetzende, nahezu homogene Wechselfeld bewirkt periodische Dehnungen in der  $Y$ -Richtung und gleichzeitig Kontraktionen in der  $X$ -Richtung oder umgekehrt. Für die Staborientierung II werden nach Abb. 2, II durch vier Elektroden Streulinien des elektrischen Feldes in Richtung der  $X$ -Achse, also der Stabachse erzeugt, die in gleicher Weise wie bei I zu Dehnungsschwingungen führen. Über die zweck-

mäßige Größe und Lage der Elektroden vgl. Abschn. 5.

Zur Anregung longitudinaler Schwingungen von Stäben der Orientierung II kommt man übrigens auch mit zwei Elektroden an Stelle der vier von Abb. 2, II aus, und zwar mit folgenden Paaren:  $E_1$  und  $E_4$ ,  $E_2$  und  $E_3$ ,  $E_1$  und  $E_2$ ,  $E_3$  und  $E_4$ . Jede dieser Anordnungen liefert die erforderliche Feldkomponente in der  $X$ -Richtung. Die Elektroden brauchen auch nicht, wie in Abb. 2, II gezeichnet, in der  $XY$ -Ebene zu liegen, sondern können in beliebigen anderen Ebenen angeordnet sein. Bei kreisförmigem Stabquerschnitt wendet man z. B. zweckmäßig zwei kreisringförmige Elektroden an.

Die Verteilung der piezoelektrischen Ladungen an longitudinal schwingenden Stäben der beiden Orientierungen I und II zeigen nach photographischen Aufnahmen die Leuchtbilder<sup>5)</sup>, Abb. 3—6, die nach unserer Methode (Abschn. 4b) im Vakuum entstehen, und zwar für verschiedene Oberschwingungen, Stablängen und Blickrichtungen nach einer der drei Koordinatenachsen. Während wir bei früheren Versuchen<sup>6)</sup> die Glimmentladung zwischen dem Quarzstab und einer der Elektroden übergehen ließen, wobei die Elektroden ebensolang wie der Stab waren, haben wir später<sup>7)</sup>, so wie in der vorliegenden Arbeit, eine möglichst gleichmäßige Ausbildung des Leuchtbildes rings um den Stab oder wenigstens nach drei Seiten angestrebt und zum Teil aus diesem Grunde die Elektrodenabmessung so klein als möglich gewählt. Da, wo die Elektroden sitzen, ist dennoch das Leuchtbild meist mehr oder weniger gestört, z. B. in den Abb. 4, 5 und 6 in der Stabmitte, auch wenn die Elektroden, wie in Abb. 4, aus nur 1 mm dicken Drahtstücken bestanden.

Die Vergleichung der Bilder I und II von Abb. 3 bzw. Abb. 4, welche die Leuchterscheinungen für die beiden Orientierungen I und II bei gleicher Stablänge und gleicher Ordnungszahl,  $k=1$  bzw.  $k=3$ , der Schwingungen zeigen, läßt sehr deutlich den Unterschied in der Art und in der Verteilung der piezoelektrischen Ladungen beider Stabsorten erkennen. Bei Stäben I haben wir Flächen-

ladungen, die ihren maximalen Wert im Deformationsmaximum, also im Bewegungsknoten, haben; bei Stäben II, wie in Abschn. 3 erläutert, Raumladungen, die, durch die Änderung der Deformation längs des Stabes bedingt, ihren maximalen Wert im Deformationsminimum, also im Bewegungsbauch, erreichen. Die longitudinale Grundschwingung hat ein Deformationsmaximum in

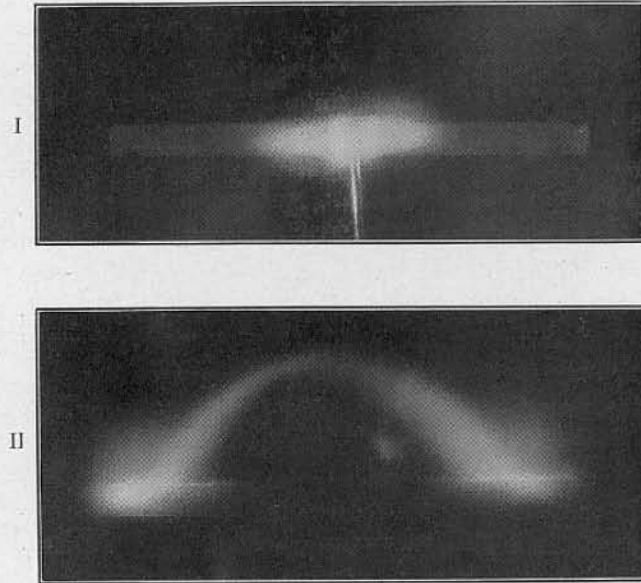


Abb. 3. Longitudinalschwingungen.

I Stab in Orientierung I.

II Stab in Orientierung II.

Stabdimensionen in mm: I  $x=1,5$ ;  $y=50$ ;  $z=3$ .

II  $x=50$ ;  $y=1,5$ ;  $z=3$ .

$k=1$ ;  $f=54500$  Hz;  $\lambda=5500$  m.

Leuchtbild I gesehen aus  $X$ -Richtung.

Leuchtbild II gesehen aus  $Y$ -Richtung.

der Mitte, je einen Bewegungsbauch an den Enden des Stabes, dementsprechend zeigt Abb. 3 bei Stab I ein Leuchtbüschel in der Mitte, bei II je ein Leuchtbüschel an den Enden. Analoges gilt für  $k=3$  in Abb. 4. (In der Mitte des Leuchtbildes, d. h. des Stabes, Störungen durch die Elektroden.) Aus der Anzahl  $n$  der einzelnen durch dunkle Zwischenräume getrennten Leuchtbüschel längs des Stabes ergibt sich also die Ordnungszahl  $k$  zu  $k=n$  bei Stäben I, zu  $k=n-1$  bei Stäben II.

Die Flächenladungen bei Stäben I haben an jedem Deformationsmaximum auf den beiden zu  $X$ -Achse senkrechten Flächen des Stabes entgegengesetztes Vorzeichen und auf jeder dieser Flächen längs des Stabes, wo Verdünnungs- und

<sup>5)</sup>  $\lambda$  bedeutet die der Frequenz  $f$  entsprechende elektrische Wellenlänge. In Abb. 3, I ist der Quarzstab vorbelichtet.

<sup>6)</sup> E. Giebe u. A. Scheibe, a. a. O.

<sup>7)</sup> E. Giebe u. A. Scheibe, ETZ 47, 380, 1926.

Verdichtungsmaxima einander abwechseln, ebenfalls entgegengesetztes Vorzeichen; die absolute Größe jeder einzelnen Flächenladung ist überall gleich groß. Die Raumladungen bei Stäben II wechseln längs des Stabes ihr Vorzeichen von

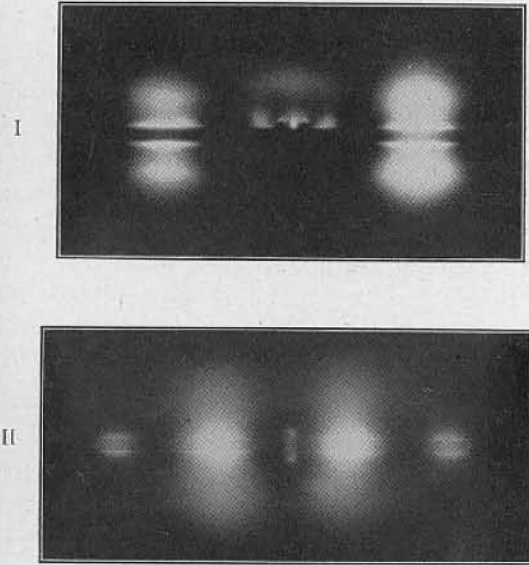


Abb. 4. Longitudinalschwingungen.

I Stab in Orientierung I.  
II Stab in Orientierung II.

Stabdimentionen in mm: I  $x = 1,5$ ;  $y = 50$ ;  $z = 3$ .  
II  $x = 50$ ;  $y = 1,5$ ;  $z = 3$ .  
 $k = 3$ ;  $f = 164\,000$  Hz;  $\lambda = 1830$  m.  
Leuchtbild I und II gesehen aus Z-Richtung.

einem Bewegungsbauch zum anderen und sind, absolut genommen, an den Stabenden stets nur halb so groß wie an den übrigen Bewegungsbauchen, wie Abb. 4, II zeigt, weil die Ladungen an

Die Glimmentladung verläuft, wie das Querschnittsleuchtbild Abb. 5b zeigt, bei den Flächenladungen an jedem Deformationsmaximum im wesentlichen von einer Stabfläche zur gegenüberliegenden entgegengesetzt geladenen, und, wie in Abb. 5a ersichtlich, nicht auf derselben Stabseite von einem Deformationsmaximum zu den beiden benachbarten, solange nicht die elastische Halbwellenlänge von der Größenordnung der Stabdicke (bei unseren Stäben 1,5 mm) wird.

Bei den Raumladungen der Stäbe II kann die Glimmentladung nur längs des Stabes von einem Bewegungsmaximum zum anderen übergehen. Dies zeigt deutlich das Leuchtbild der Grundschwingung in Abb. 3, II, wo nur eine, etwa positive Raumladung an dem einen Stabende, und eine negative Raumladung am anderen Ende vorhanden ist; die Glimmentladung überbrückt in einem großen Bogen nahezu die Stablänge von 5 cm.

Daß das piezoelektrische Feld von longitudinal schwingenden Stäben II rings um die Stabachse symmetrisch ist, läßt Abb. 15a erkennen, welche das Querschnittsleuchtbild, gesehen in Richtung der Achse, für einen Stab II von kreisförmigem Querschnitt wiedergibt; das Glimmlicht bedeckt den Stabumfang gleichmäßig.

Longitudinalschwingungen in Richtung der X-Achse, wie bei Abb. 3, II und 4, II, werden praktisch bei den piezoelektrischen Oszillatoren angewandt. Man benutzt dabei Platten von rechteckigem oder kreisförmigem Querschnitt, deren Abmessung in Richtung der X-Achse, anders wie

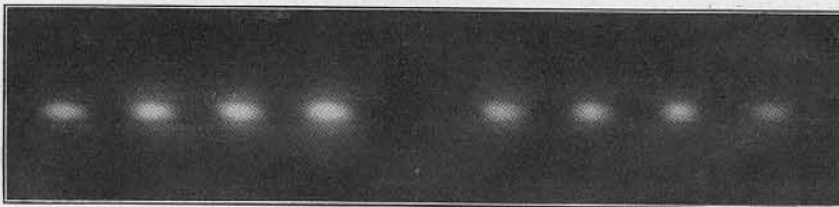


Abb. 5a.



Abb. 5b.

Longitudinalschwingung. — Stab in Orientierung I. — Stabdimentionen in mm:  $x = 1,5$ ;  $y = 99$ ;  $z = 3$ . —  $k = 9$ ;  $f = 248\,600$  Hz;  $\lambda = 1206$  m. — Leuchtbild a gesehen aus X-Richtung. — Leuchtbild b gesehen aus Y-Richtung.

den Enden durch die Deformationsänderung längs einer Viertelwellenlänge, die übrigen Ladungen durch die Deformationsänderung längs einer halben Wellenlänge entstehen. Die Gesamtsumme aller Einzelladungen eines Stabes ist in jedem Fall gleich Null.

bei den hier untersuchten Stäben, klein ist gegenüber den Abmessungen in den beiden anderen Richtungen oder von gleicher Größenordnung wie diese. Dementsprechend ist die Elektrodenanordnung anders als die hier benutzte. Daß bei den Schwingungen solcher Oszillatoren Raumladungen

und nicht Flächenladungen auftreten, scheint bisher nicht erkannt zu sein.

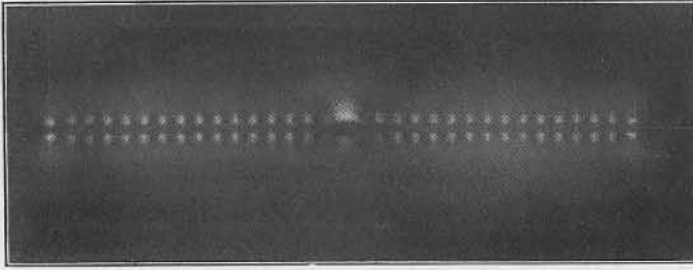


Abb. 6. Longitudinalschwingung.  
Stab in Orientierung I.  $\theta^{\#}$   
Stabdimmensio nen in mm:  $x = 1,5$ ;  $y = 80$ ;  $z = 1,5$ .  
 $k = 33$ ;  $f = 1113400$  Hz;  $\lambda = 269,3$  m.  
Leuchtbild aus  $Z$ -Richtung gesehen.

### 7. Erregung von transversalen Schwingungen in der Richtung der $Z$ -Achse.

Denkt man sich den Stab der Orientierung I durch einen parallel zur  $XY$ -Ebene durch die

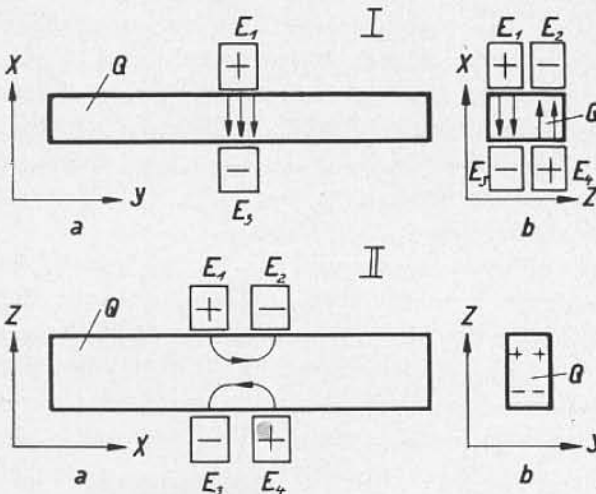


Abb. 7. Erregung transversaler Schwingungen in Richtung der  $Z$ -Achse.

Stabachse geführten Längsschnitt in zwei Hälften zerlegt, so sind nach Abb. 7, Ib für jede von

diesen die Anregungsbedingungen die gleichen wie bei den longitudinalen Schwingungen (Abb. 2, I); jedoch sind die erregenden Felder in ein und demselben Längsstück des Stabes in seiner oberen und unteren Hälfte um  $180^\circ$  in der Phase gegeneinander verschoben. Während sich also die eine Stabhälfte ausdehnt, zieht sich im gleichen Zeitmoment die andere zusammen. Daraus resultieren periodische Biegungen des Stabes. In gleicher Weise ist die Wirkungsweise der für die Orientierung II benutzten Anordnung (Abb. 7, II) für transversale Schwingungen aus der für longitudinale gültigen (Abb. 2, II) zu verstehen<sup>8)</sup>. Bezüglich der Länge und der Lage der Elektroden gelten für beide Orientierungen dieselben schon erörterten Überlegungen wie bei den entsprechenden longitudinalen Schwingungen. Stäbe der Orientierung II kann man auch mit zwei Elektroden  $E_1$  und  $E_2$  oder  $E_3$  und  $E_4$ , statt mit vieren, obschon mit geringerer Intensität, anregen; da nämlich das Streufeld zweier solcher Elektroden  $E_1$  und  $E_2$ , wenn  $E_3$  und  $E_4$  fehlen, im Quarz in Richtung der  $Z$ -Achse schnell abnimmt, so werden die nahe den Elektroden befindlichen Stabfasern stärker dilatiert und kontrahiert als die entfernteren; der Stab muß sich daher biegen. Über eine weitere Zwei-Elektrodenanordnung vgl. Abschn. 8, Abb. 9, II B.

Das Leuchtbild einer transversalen Schwingung für einen Stab zeigt Abb. 8 in zwei Ansichten a und b nach photographischer Aufnahme. Die Verteilung der piezoelektrischen Ladungen an jedem Deformationsbauch entspricht den bei Biegungen eintretenden Deformationen. In der

<sup>8)</sup> In den Abb. 2 II, 7 II, 9 II A und 9 II B ist der Schnitt b nicht durch ein Elektrodenpaar, sondern durch den Zwischenraum  $E_1-E_2$  und  $E_3-E_4$  bzw. seitlich der Elektroden geführt.

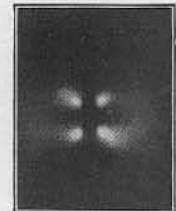


Abb. 8a.

Abb. 8b.

Transversalschwingung in  $Z$ -Richtung. — Stab in Orientierung I.  
Stabdimmensio nen in mm:  $x = 1,5$ ;  $y = 99$ ;  $z = 3$ . —  $k = 9$ ;  $f = 62020$  Hz;  $\lambda = 4835$  m.  
Leuchtbild a gesehen aus  $X$ -Richtung. — Leuchtbild b gesehen aus  $Y$ -Richtung.



durch die Stabachse parallel zur  $XY$ -Ebene gelegten Mittelebene des Stabes finden keine Deformationen statt, infolgedessen können an ihrer Schnittlinie mit den beiden zur  $X$ -Achse senkrechten Stabflächen keine Ladungen auftreten. Von jener Mittelebene aus in Richtung der  $Z$ -Achse nimmt die Deformation nach beiden Seiten hin zu, und zwar tritt, für denselben Zeitmoment und ein- und denselben Deformationsbauch betrachtet, auf der einen Seite Dilatation, auf der anderen Kontraktion ein. Die Ladungen müssen also nahe den Stabkanten am stärksten sein. Die Polarität der Ladungen, von denen hier vier räumlich voneinander getrennte an jedem Deformationsbauch auftreten, entspricht der Polarität der Anregungselektroden. Der Unterschied der Leuchtfiguren bei transversalen und longitudinalen Schwingungen ist aus dem Vergleich der Abb. 5 und 8 zu ersehen. Die Ladungen sind hier wieder Flächenladungen auf den zur  $X$ -Achse senkrechten Stabebenen.

Bei Stäben der Orientierung II treten bei transversalen Schwingungen aus den gleichen Gründen wie bei longitudinalen Raumladungen auf. Während aber bei longitudinaler Schwingung in einem Volumelement des Stabes von der Dicke  $dx$  in Richtung der  $X$ -Achse und vom Querschnitt des Stabes die Raumladungen an jeder Stelle gleich groß sind, ändert sich hier ihre Größe in Richtung parallel der  $Z$ -Achse von Ort zu Ort. An der zur  $Z$ -Achse senkrechten Mittelebene des betrachteten Volumelements sind die Raumladungen Null und nehmen beiderseits dieser Ebene in der  $Z$ -Richtung mit entgegengesetztem Vorzeichen zu. In den Leuchtfiguren dieser Schwingungen sehen die Glimmlichtbüschel annähernd so aus, als ob sie von Flächenladungen herrührten (wie bei longitudinalen Schwingungen von Stäben der Orientierung I), die hier auf den zur  $Z$ -Achse senkrechten Stabebenen zu sitzen scheinen. Nach den Grundgesetzen der Piezoelektrizität am Quarz sind jedoch auf diesen Ebenen Flächenladungen unmöglich. Die Zweiteilung der Raumladungen zeigt deutlich, im Vergleich mit Abb. 15a, die Abb. 15b, welche das Leuchtbild, gesehen aus der  $X$ -Richtung, eines transversal schwingenden Stabes von kreisförmigem Querschnitt in Orientierung II wiedergibt.

Von der Verteilung der piezoelektrischen Ladungen längs eines Stabes der Orientierung II bei

transversalen Oberschwingungen wird im folgenden bei Behandlung der Transversalschwingungen in der  $Y$ -Richtung die Rede sein, wo die Erscheinungen die gleichen sind, nur daß  $Y$ - und  $Z$ -Achse gegeneinander vertauscht sind.

### 8. Erregung von Transversalschwingungen in Richtungen senkrecht zur $Z$ -Achse.

Für Stäbe der Orientierung I, die in der  $X$ -Richtung schwingen, ergibt die Anordnung Abb. 9, I, wie die eingezeichneten Feldlinien andeuten, zwischen den Elektroden  $E_1$  und  $E_3$  im

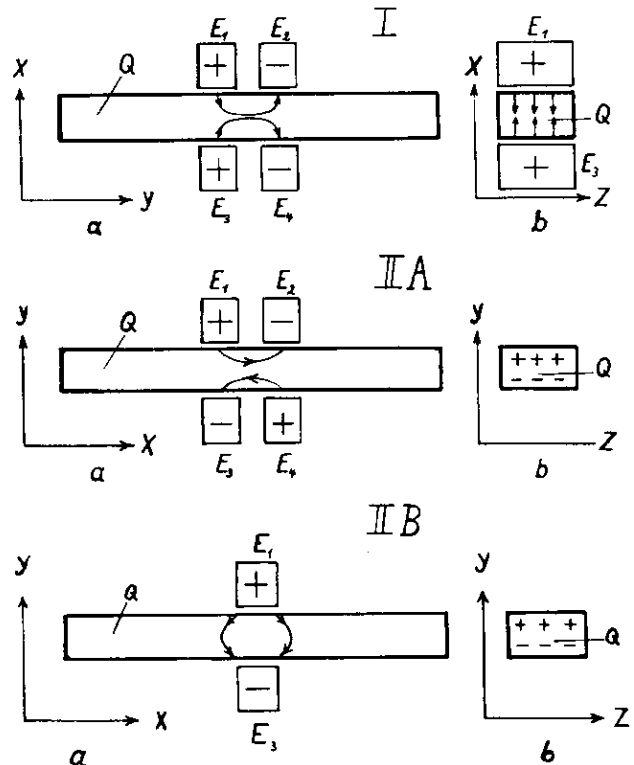


Abb. 9. Erregung transversaler Schwingungen in Richtung der  $X$ - bzw.  $Y$ -Achse.

Quarz einander entgegengerichtete Feldkomponenten in der  $X$ -Richtung (ebenso zwischen  $E_2$  und  $E_4$ , aber mit umgekehrtem Richtungssinn), die also entgegengesetzte Deformationen in der oberen und unteren Stabhälfte und somit, ebenso wie bei den schon behandelten Anordnungen (Abschn. 7), periodische Biegungen zur Folge haben. Die durch die Elektroden  $E_2$ ,  $E_4$  erzeugte Biegung ist um  $180^\circ$  in der Phase gegen die bei  $E_1$ ,  $E_3$  entstehende verschoben. Damit die Anordnung zu Schwingungen führt, müssen demnach die Elektrodenpaare  $E_1$ ,  $E_3$  einerseits, die Paare  $E_2$ ,  $E_4$  andererseits symmetrisch zu einem

Bewegungsknoten der zu erzeugenden Schwingung angeordnet sein. Der Knoten muß außerdem zugleich ein Wendepunkt der Bewegung sein. Bekanntlich sind bei transversalen Stabschwingungen die den Stabenden nächstgelegenen Bewegungsknoten keine Wendepunkte, daher kann man an diesen mit der Anordnung Abb. 8, I Schwingungen nicht anregen und die transversale Grundschwingung, die nur zwei Bewegungsknoten ohne Wendepunkte aufweist, überhaupt nicht, was durch den Versuch bestätigt wurde. Der Abstand der Elektroden  $E_1$  und  $E_2$  sowie  $E_3$  und  $E_4$  muß bei hohen Ordnungszahlen möglichst klein sein, ihre Länge in der  $Y$ -Richtung ist für die Wirkung der Anordnung fast belanglos.

Über die Anordnung Abb. 9, IIA für die Stäbe der Orientierung II, wenn sie in der  $Y$ -Richtung schwingen, ist nichts weiter zu sagen, sie entspricht in jeder Beziehung der schon besprochenen Anordnung Abb. 7, II. Doch sei noch eine andere Erregungsart von Transversalschwingungen für Stäbe II erörtert. Bei dieser werden statt 4 nur 2 Elektroden  $E_1$  und  $E_3$  benützt, die nach Abb. 9, IIB angeordnet sind. Die senkrecht zu den Elektroden gerade verlaufenden Feldlinien rufen keine Dehnungen hervor, weil sie in die  $Y$ -Richtung fallen. Doch gehen zwischen den beiden Elektroden, und zwar beiderseits von ihnen, auch gebogene Feldlinien über. Es sind somit Feldkomponenten in der  $X$ -Richtung vorhanden, die in der oberen und unteren Stabhälfte und beiderseits der Elektroden entgegengesetzte Richtung haben; sie führen, wie experimentell erprobt, ebenfalls zu Biegungsschwingungen, wenn man die relative Lage von Stab und Elektroden so wählt, daß die Elektrodenmitten an einem Deformationsknoten der Stabschwingung liegen.

Sehr interessant ist die Verteilung der piezoelektrischen Ladungen bei transversal in der  $X$ -Richtung schwingenden Stäben der Orientierung I. Auch hier treten neben Flächenladungen Raumladungen auf, aber in ganz anderer Verteilung als in den schon behandelten Fällen. Denken wir uns den Stab Abb. 9, I durch einen parallel der  $YZ$ -Ebene in seiner Achse geführten Längsschnitt in zwei Hälften geteilt; dann finden bei der Biegungsschwingung an einem und demselben Deformationsbauch, in der oberen Stabhälfte Dilatationen, in der unteren im gleichen Zeitmoment Kontraktionen statt. Da die De-

formationen die entgegengesetzten sind, müssen auch die in beiden Stabhälften entstehenden Ladungen die entgegengesetzten sein. Bei gleicher Deformation beider Stabhälften würden die Ladungen, die auf den beiden zur  $X$ -Achse senkrechten Flächen des ganzen Stabes entstehen, wie bei longitudinalen Schwingungen entgegengesetztes Vorzeichen haben, bei entgegengesetzten Deformationen müssen sie also von gleichem Vorzeichen sein, ihre Polarität muß derjenigen der Elektrodenpaare  $E_1, E_3$  bzw.  $E_3, E_4$  in Abb. 9, I entsprechen. Diesen beiden gleichpoligen Flächen

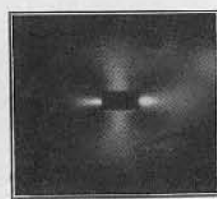
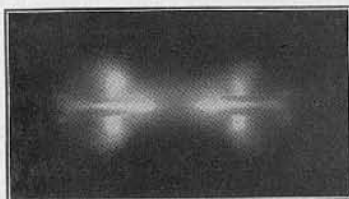


Abb. 10a.

Abb. 10b.

Transversalschwingung in  $X$ -Richtung.  
Stab in Orientierung I.

Stabdimensionen in mm:  $x = 1,5$ ;  $y = 20$ ;  $z = 3$ .

$k = 2$ ;  $f = 55800$  Hz;  $\lambda = 5380$  m.

Leuchtbild a gesehen aus  $Z$ -Richtung.

Leuchtbild b gesehen aus  $Y$ -Richtung.

ladungen entsprechen an jedem Deformationsbauch entgegengesetzte Ladungen im Innern des Quarzes, so daß für jeden Deformationsbauch die Summe aller entstehenden piezoelektrischen Ladungen gleich Null ist. Die geschilderte Verteilung der Ladungen ist aus den Leuchtbildern Abb. 10a und b deutlich zu erkennen. Im Schnitt b) sieht man, daß außer von den zur  $X$ -Achse senkrechten Stabflächen auch von den zur  $Z$ -Achse senkrechten Flächen Glimmlichtbüschel ausgehen; die letzteren sind durch die Raumladungen bedingt.

Die Leuchtfigur einer Transversalschwingung in der  $Y$ -Richtung für einen Stab der Orientierung II zeigt Abb. 11, II; ein gleich langer Stab, bei Orientierung I in der  $X$ -Richtung schwingend, gibt bei gleicher Ordnungszahl  $k = 5$  eine Leuchtfigur, die zum Vergleich mit II in Abb. 11, I wiedergegeben ist. Beide Bilder unterscheiden sich in ähnlicher Weise voneinander, wie bei longitudinalen Schwingungen. Stab I leuchtet an den Deformationsbäuchen, II an den Deformationsknoten, die bei transversalen Schwingungen mit den Bewegungsknoten zusammenfallen. Bei Bild II sind die Leuchtbüschel von zwei Knoten zur Hälfte durch die Anregungselektroden ver-

deckt, bei I fehlt ein Leuchtbüschel fast völlig an der Stelle der Elektroden. In Bild I sieht man an den Stabenden schwache Lichtbüschel, dadurch wird sichtbar, daß, wie bekannt, bei transversalen Stabschwingungen Deformationsknoten nicht an den Enden des Stabes liegen. Die Entfernung der Knotenlage von den Enden ergibt sich aus dem Vergleich von Bild I mit II.

Daß sich Transversalschwingungen auch von hoher Ordnung leuchtend anregen lassen, wenn auch nicht immer gleichmäßig über die ganze Stablänge, zeigt Abb. 12 für die 44. Oberschwingung.

Das Leuchtbild von Transversalschwingungen bei Stäben der Orientierung I, gesehen aus der Z-Richtung, in welcher je zwei Leuchtbüschel übereinanderliegen, unterscheidet sich bei hohen

Reproduktionen. Wegen Unvollkommenheiten der photographischen Aufnahmen und der Reproduktionen zeigen die drei Abb. 10, 11, I und 12, die das Leuchtbild der gleichen Schwingungsart und Staborientierung nur bei verschiedenen Ord-

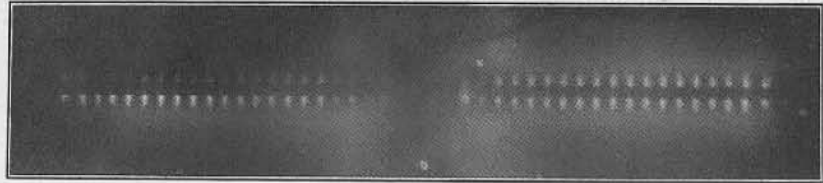
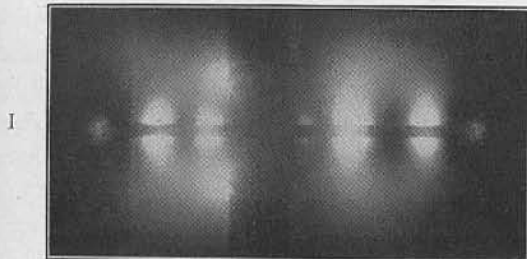


Abb. 12. Transversalschwingung in X-Richtung. — Stab in Orientierung I.  
Stabdimensionen in mm:  $x = 1,5$ ;  $y = 80$ ;  $z = 3$ .  
 $k = 44$ ;  $f = 684\,600$  Hz;  $\lambda = 438$  m.  
Leuchtbild gesehen aus Z-Richtung.

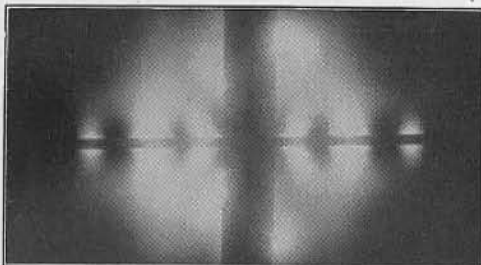
nungszahlen wiedergeben, nicht alle die oben geschilderten Einzelheiten. Das charakteristische Leuchtbüschel an den Stirnflächen des Stabes ist in Abb. 11 ziemlich deutlich, in Abb. 10a kaum, in Abb. 12 überhaupt nicht zu erkennen, in Wirklichkeit aber immer zu sehen. Die Raumladungen in der Stabachse, die Abb. 10a so deutlich zeigt, sind auch in Wirklichkeit bei höheren Ordnungszahlen immer schwerer zu erkennen.

### 9. Erregung von Torsionsschwingungen.

Zur Anregung von Torsionsschwingungen, also zur Erzeugung des notwendigen Drehmomentes um die Stabachse gingen wir davon aus, das erregende elektrische Feld so zu gestalten, daß die eine Hälfte des durch einen Längsschnitt, senkrecht zur Z-Achse, geteilt gedachten Stabes in der einen Richtung, die andere Hälfte im gleichen Zeitmoment und an der gleichen Stelle in der entgegengesetzten Richtung gebogen wird. Wir versuchten also Drillungen durch zwei entgegengesetzte Biegungen in entsprechender Weise wie nach Abschn. 7 Biegungen durch zwei entgegengesetzte Dehnungen zu erzwingen und kamen so zu den in Abb. 13 gezeigten Vier-Elektrodenanordnungen. Nach dieser Überlegung würden nicht die in Abb. 13, II eingezeichneten Hauptfeldlinien, die in der Y-Richtung verlaufen, die wirksamen sein, sondern die beiderseits der Elektroden in der X-Richtung verlaufenden Komponenten des Streufeldes, wie sie in der Zweielektrodenanordnung von Abb. 9, II B angedeutet sind. Beide Anordnungen führten in



I



II

Abb. 11. I Transversalschwingungen in X-Richtung.  
II Transversalschwingungen in Y-Richtung.  
I Stab in Orientierung I.  
II Stab in Orientierung II.  
Stabdimensionen in mm: I  $x = 1,5$ ;  $y = 50$ ;  $z = 3$ .  
II  $x = 50$ ;  $y = 1,5$ ;  $z = 3$ .  
 $k = 5$ ;  $f = 43\,000$  Hz;  $\lambda = 7000$  m.  
Leuchtbild I u. II gesehen aus Z-Richtung.

Ordnungen nur wenig von dem Leuchtbild der entsprechenden Longitudinalschwingungen gleicher Ordnung (vgl. die Abb. 6 und 12), insbesondere auf den photographischen Platten und in den

der Tat zu dem gewünschten Erfolg, wobei über den Drillungscharakter der Schwingungen kein Zweifel bestehen konnte, da das Frequenzspektrum der beiden anderen Schwingungsarten schon durch Messungen bestimmt war und die neu beobachteten Frequenzen den theoretisch zu erwartenden Gesetzen gehorchten. Außerdem läßt das Aussehen der Leuchtbilder (Abb. 15c) unmittelbar erkennen, daß es sich um einen anderen Schwingungstyp als den longitudinalen oder transversalen handelt. Jedoch ist das Entstehen von Torsionsschwingungen für die Anordnung von Abb. 13, II, und auch für diejenige von Abb. 13, I, auf andere Weise zu erklären als nach der anfänglichen Über-

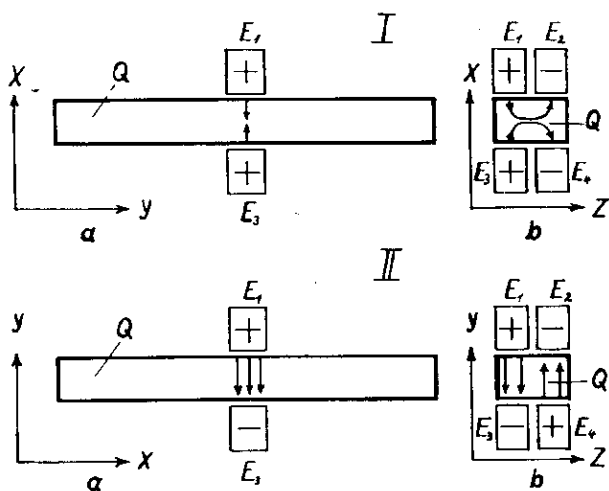


Abb. 13. Erregung von Torsionsschwingungen.

legung, wie sich experimentell aus folgenden Versuchen ergab.

Wir behandeln nur die Anordnung Abb. 13, II. Die Beobachtung, daß sich in diesen Drillungsschwingungen sehr leicht, nahezu ebenso leicht wie Dehnungsschwingungen bei Stäben der Orientierung I anregen ließen, legte von vornherein die Vermutung nahe, daß nicht die oben bezeichneten Streufeldlinien in der  $X$ -Richtung, sondern vielmehr die Hauptfeldlinien in der  $Y$ -Richtung die wirksamen seien. War diese Vermutung richtig, so mußten Drillungsschwingungen auch anregbar sein durch ein elektrisches Feld, das gar keine Komponenten in der  $X$ -Richtung besitzt. Wählt man die Länge der 4 Elektroden der Anordnung Abb. 13, II größer als die des Quarzstabes, so erhält man (abgesehen von der Randwirkung an den Stabenden) ein Feld der gewünschten Art, dessen Hauptkomponente in die  $Y$ -Richtung fällt,

während außerdem nur noch Streukomponenten in der piezoelektrisch unwirksamen  $Z$ -Richtung vorhanden sind. Der Versuch ergab, daß sich die Grundschwingung  $k=1$  und alle ungeradzahigen Oberschwingungen  $k=3, 5, \dots$  sehr leicht anregen ließen und lieferte somit den Beweis, daß die in die  $Y$ -Richtung fallenden Komponenten für die Torsion die allein wirksamen sind. Die Erregung von geradzahigen Oberschwingungen mit Elektroden, die länger sind als der Stab, ist aus Gründen nicht möglich, die in Abschnitt 5 erörtert sind; im übrigen gilt bezüglich der Länge der Elektroden in Richtung der Stabachse und ihrer relativen Lage zum Stab hier das gleiche wie bei Dehnungsschwingungen von Stäben I.

Nach dem Ergebnis dieser Versuche entsteht der Torsionseffekt durch ein in der  $Y$ -Richtung, also senkrecht zur elektrischen Achse des Quarzes verlaufendes elektrisches Feld, während für Dehnungen und Biegungen die Feldrichtung parallel zur elektrischen Achse maßgebend ist. Weitere Versuche lehrten ferner, daß eine örtliche Änderung der Feldstärke innerhalb des Stabquerschnittes längs der  $Z$ -Richtung eine notwendige Bedingung für das Entstehen von Torsionsschwingungen ist. Jedoch ist eine Umkehrung der Feldrichtung wie in Anordnung Abb. 13, II nicht unbedingt notwendig; man kann vielmehr diese Anordnung auch so abändern, daß man nur 2 Elektroden, und zwar  $E_1$  und  $E_3$  oder  $E_2$  und  $E_4$  an Stelle von vieren anbringt, indem man also die eine Hälfte des Stabquerschnittes über die Elektroden hinausragen läßt. In dieser Hälfte ist dann die Feldstärke Null oder nahezu Null. Wählt man aber die Höhe der zwei Elektroden in der  $Z$ -Richtung ebenso groß wie die Stabhöhe  $z$ , so daß das Feld nahezu homogen über den ganzen Querschnitt ist, so tritt keine Torsion ein.

Das Entstehen der Drillung für unsere experimentell gefundene Anordnung Abb. 13, II kann man, wie sich im Laufe von Unterhaltungen mit Herrn Professor v. Laue über diesen Gegenstand ergab, auf folgende Weise aus der mathematischen Theorie der Piezoelektrizität von Voigt<sup>9)</sup> für den statischen Fall erklären. In einem beliebigen elektrischen Feld tritt bei einem Quarzkristall

<sup>9)</sup> W. Voigt, Lehrbuch der Kristallphysik. Leipzig, 1910 S. 817 u. 859.

eine potentielle Energie der Wechselwirkung zwischen Feld- und elastischen Spannungen auf, welche je Volumeinheit den Betrag

$$W = (d_{11} X_x - d_{11} Y_y + d_{14} Y_z) E_x - (d_{14} Z_x + 2 d_{11} X_y) E_y \quad (1)$$

besitzt. Dabei bedeuten  $E_x, E_y$  die Komponenten der elektrischen Feldstärke,  $X_x, Y_y, \dots$  die 6 Komponenten der elastischen Spannungen und  $d_{11}, d_{14}$  die beiden für den Quarz charakteristischen piezoelektrischen Moduln. Die Lage des Koordinatensystems sei die in Abschnitt 2 angegebene. Die bei unserer Orientierung II parallel der Stabachse liegende  $X$ -Achse gehe durch den Schwerpunkt des Querschnittes. Die Komponente  $E_z$  ist in obigem Ausdruck nicht enthalten, weil in der  $Z$ -Richtung beim Quarz keine piezoelektrische Wirkung eintritt. Bei unserer Anordnung ist nun — wie oben erläutert — auch  $E_x = 0$ , somit wird

$$W = - (d_{14} Z_x + 2 d_{11} X_y) E_y. \quad (2)$$

Da diese Gleichung keine der drei normalen Spannungskomponenten  $X_x, Y_y, Z_x$  enthält, sondern nur tangentiale, so erkennt man zunächst, daß durch ein in der  $Y$ -Richtung verlaufendes Feld unter keinen Umständen Dilatationen und Kontraktionen entstehen können. Wohl aber besteht die Möglichkeit, Drehmomente zu erzeugen. Dazu ist erforderlich, daß das Integral von  $W$ , genommen über den ganzen Stabquerschnitt nicht zu Null wird. Unsere Versuche haben nun folgendes gezeigt: 1. Ein über den ganzen Querschnitt homogenes Feld  $E_y$  wirkt nicht deformierend. 2. Ändert  $E_y$  mit der Koordinate  $z$  das Vorzeichen, so tritt Torsion ein. Im zweiten Fall muß demnach jenes Integral einen von Null verschiedenen Wert haben, was nur möglich ist, wenn  $Z_x$  oder  $X_y$  oder beide Komponenten ebenso wie  $E_y$  mit  $z$  ihr Vorzeichen ändern. Dies ist in der Tat bei der Torsion der Fall. Nach Voigt<sup>10)</sup> erfüllen nämlich bei der Drillung eines Kreiszyinders um seine Achse unter der Wirkung ausschließlich tangentialer Drucke gegen seine Endflächen die 6 Spannungskomponenten die folgenden Bedingungen

$$X_x = Y_y = Z_x = Y_z = 0, \quad (3)$$

$$X_y = az, Z_x = -ya, \quad (3a)$$

<sup>10)</sup> W. Voigt, a. a. O., S. 881, wo aber die Stabachse in die  $Z$ -Richtung und nicht, wie hier, in die  $X$ -Richtung fällt.

wo  $a$  eine Konstante ist.  $X_y$  hat die geforderte Richtungsabhängigkeit, während  $Z_x$  nur von  $y$  abhängt und somit gar nicht in Betracht kommt.

Was endlich den Funktionalzusammenhang zwischen  $E_y$  und  $z$  betrifft, so ist ersichtlich, daß das über den Querschnittgenommene Integral von (2) auch dann noch einen endlichen Wert ergeben kann, wenn  $E_y$  nicht mit  $z$  das Vorzeichen wechselt, sondern wie bei dem oben beschriebenen Versuch in der einen Hälfte des Stabquerschnittes Null und in der anderen einen nahezu konstanten Wert hat.

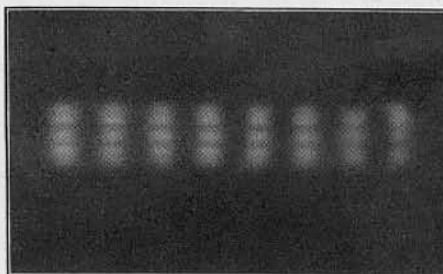


Abb. 14a.



Abb. 14b.

Torsionsschwingung um die  $X$ -Achse. — Stab in Orientierung II. Stabdimensionen in mm:  $x = 50$ , kreisförmiger Querschnitt, Durchm. 3,  $k = 9$ ,  $f = 350\,000$  Hz,  $\lambda = 850$  m.

Leuchtbild a gesehen unter  $45^\circ$  gegen  $Y$ - und  $X$ -Achse.  
Leuchtbild b gesehen aus  $X$ -Richtung.

Die Verteilung der piezoelektrischen Ladungen bei Torsionsschwingungen für einen Stab der Orientierung II von kreisförmigem Querschnitt zeigen die Leuchtbilder Abb. 14. Im Querschnitt hat man eine Vierteilung, also abwechselnd positives und negatives Vorzeichen der Ladungen<sup>11)</sup>. Die Anzahl der Leuchtbüschel (zu je 4 im Querschnitt) längs des Stabes ist gleich der Anzahl der Deformationsmaxima, also gleich der Ordnungszahl der Oberschwingungen; die Anregungselektroden saßen am linken Stabende, sie verdecken eine Leuchtbüschelgruppe. Für rechteckigen Querschnitt ist die Ladungsverteilung im Querschnitt bei Torsionsschwingungen von Stäben II etwa die gleiche wie bei Transversalschwingungen in der  $Z$ -Richtung von Stäben I. Zur Anregung von Torsionsschwingungen bei kreisförmigem Querschnitt wurden quadrantenförmige Elektroden benutzt. Da die ungefähre Lage der optischen ( $Z$ -) Achse im Querschnitt bekannt war, konnte

<sup>11)</sup> Diese Ladungsverteilung ist von W. Voigt (Lehrb. der Kristallphysik, Leipzig 1910, Seite 891) für statische Drillungen im Anschluß an Versuche von Röntgen theoretisch abgeleitet.

man durch Drehen des Stabes um seine Achse innerhalb der Elektroden die für die Anregung der Schwingungen günstigste Lage der Elektroden relativ zur  $Y$ - oder  $Z$ -Achse feststellen; durch die Stellen, wo keine Ladungen auftreten, geht die  $Y$ - und die  $Z$ -Achse, die Ladungsmaxima liegen unter nahezu  $45^\circ$  gegen diese Achsen. Die Elektroden müssen dementsprechend zum kreisrunden Stab orientiert sein. Lehrreich ist der Vergleich der Ladungsverteilung bei den drei verschiedenen Schwingungsarten an der Hand der Querschnittsleuchtbilder Abb. 15a, b und c.

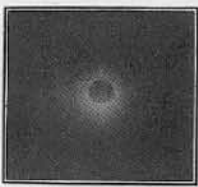


Abb. 15a.



Abb. 15b.

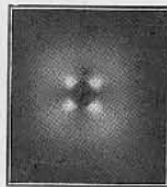


Abb. 15c.

Stäbe kreisförmigen Querschnittes in Orientierung II. Leuchtbilder gesehen aus  $X$ -Richtung (Stabachse): a) longitudinale Schwingung, b) transversale Schwingung, c) Torsionsschwingung.

Torsionsschwingungen von Stäben I lassen sich in der Anordnung Abb. 13, I nur sehr schwer anregen<sup>12)</sup>.

#### 10. Unterschiede in der Anregbarkeit der drei Schwingungsarten.

Sie beruhen im wesentlichen darauf, daß bei einigen der beschriebenen Anordnungen nahezu das gesamte erzeugte elektrische Feld zur Wirkung kommt, bei anderen aber nur ein mehr oder weniger großer Bruchteil des Gesamtfeldes. Im ersten Fall sind die Schwingungen leicht, im zweiten schwerer anregbar. Die Antwort auf die praktische Frage, wie man jede der drei Schwingungsarten am zweckmäßigsten anregt, ist danach folgende: Für longitudinale Schwingungen nach Anordnung Abb. 2, I mit Stäben I, für transversale nach Abb. 7, I mit Stäben I, für Torsionsschwingungen nach Abb. 13, II mit Stäben II. Dies sind diejenigen Anordnungen, bei denen sich durch statische elektrische Felder eine längs des Stabes gleichförmige Dehnung, Biegung oder Drillung bewirken läßt, während alle übrigen Anordnungen im statischen Falle

nur in einem kurzen Längsstück des Stabes Deformationen ergeben oder überhaupt wirkungslos sind. Die Unterschiede in der Wirkung der verschiedenen Anordnungen nehmen mit zunehmender Ordnung der Schwingungen immer mehr ab, sie sind bei sehr hohen Frequenzen unmerklich, bei den niedrigsten Frequenzen (etwa 1000 Hz) der transversalen Eigenschwingung kleinster Ordnung aber beträchtlich. In Anordnung Abb. 7, I konnten wir einen 80 mm langen Stab von  $1,5 \times 1,5 \text{ mm}^2$  in seiner transversalen Grundschwingung ( $k=1$ ,  $f=1300 \text{ Hz}$ ) im Vakuum leuchtend anregen; die Anordnung Abb. 9, I, in der nach Abschnitt 7 die Schwingung  $k=1$  aus prinzipiellen Gründen überhaupt nicht angeregt werden kann, ist im Niederfrequenzbereich ebenso wie die Anordnungen Abb. 7, II und Abb. 9, II A u. B bedeutend ungünstiger. In den drei letztgenannten Anordnungen kann man die Leuchterscheinung bei Schwingungen niedrigster Ordnung nicht erzeugen. Eine Ausnahmestellung nimmt die An-

ordnung Abb. 13, I ein, in dieser sind Torsionsschwingungen jeder Ordnung schwer anregbar.

Ein weiterer Unterschied in der Anregbarkeit der drei Schwingungsarten, der jedoch nur bei normalem Luftdruck, dann aber sehr erheblich in Betracht kommt, ist auf den Luftwiderstand zurückzuführen. Offenbar rührt dieser bei Schwingungen nur zum geringsten Teil von der Luftreibung, sondern hauptsächlich von der Trägheit der Luft her, die durch den schwingenden Stab in schnelle periodische Bewegungen gesetzt wird. Verhältnismäßig klein ist der Luftwiderstand bei longitudinalen Stabschwingungen, weil die Luft hier nur durch die kleinen Stirnflächen des Stabes bewegt wird, etwas größer bei longitudinalen Plattenschwingungen. Bei transversalen Schwingungen aber, sowie bei Torsionsschwingungen von rechteckigen Stäben, wo die Luft längs des ganzen Stabes mitbewegt wird, ist der dämpfende Einfluß des Luftwiderstandes bei höheren Frequenzen so groß, daß die Amplitude der Schwingungen äußerst klein bleibt. Dies läßt sich experimentell in einfacher Weise demonstrieren. Man erregt eine transversale Oberschwingung von einigen 100 000 Hz und stellt auf große Lautstärke des Schwebungstones der akustischen Methode von Cady, etwa unter Benutzung eines Laut-

<sup>12)</sup> Näheres siehe E. Giebe u. A. Scheibe, ZS. f. Phys. 46, S. 607, 1928.

sprechers, ein. Läßt man nun langsam Luft in das Vakuumgefäß strömen, so wird der Schwebeston allmählich immer lautschwächer, um schließlich ganz zu verschwinden. Transversalschwingungen hoher Frequenz kann man also nur im Vakuum mit merklicher Amplitude anregen und nach Cady's Methode bei gewöhnlichem Luftdruck überhaupt nicht beobachten. Dasselbe gilt für Torsionsschwingungen von rechteckigem Querschnitt. Am geringsten, noch kleiner als bei longitudinalen Stabschwingungen, ist die Dämpfung durch Luft von Atmosphärendruck bei Torsionsschwingungen von Stäben mit kreisförmigem Querschnitt, weil in diesem Fall Luft überhaupt nicht bewegt wird, der Luftwiderstand also nur in Luftreibung besteht. In einem Vakuum von 0,3 bis 1,5 mm Hg, wie wir es anwandten, fallen die auf dem Luftwiderstand beruhenden Unterschiede fort.

Der Einfluß der Montierung auf die Dämpfung ist in der vorliegenden Arbeit nicht besonders beachtet; die Stäbe wurden in den meisten Fällen einfach auf eine glatte Unterlage gelegt, meist eine Hartgummiplatte, auf welcher die Anregungselektroden aufgeschraubt waren. Nur bei niedrigen und mittleren Frequenzen war es notwendig, die Stäbe auf zwei runde Drähte oder Nähnadeln, aufzulegen oder mittelst Zwirnsfäden zu halten. Die Auflage- oder Haltepunkte mußten dann — und zwar je niedriger die Frequenz war, um so genauer — an den Schwingungsknoten liegen. Ohne diese Hilfsmittel waren die Schwingungen entweder zu stark gedämpft, oder wurden durch unregelmäßige, stoßweise erfolgende Bewegungen der Stäbe gestört.

Ein Vergleich der verschiedenen Elektrodenanordnungen lehrt, daß man in derselben Anordnung je nach der Orientierung des Stabes verschiedene Schwingungsarten erhält und daß man für beide Orientierungen und alle drei Schwingungsarten mit drei verschiedenen Anordnungen auskommt, nämlich: a) mit zwei Elektroden, b) mit vier Elektroden, zu je zwei nebeneinander angeordnet, c) mit vier Elektroden, zu je zwei übereinander angeordnet.

### 11. Das Frequenzspektrum der elastischen Eigenschwingungen von Quarzstäben.

Die durch die beschriebenen Anordnungen gegebene Möglichkeit außer longitudinalen auch transversale und Torsions-Schwingungen piezo-

elektrisch anzuregen, erhöht die Anzahl der als Normalfrequenzen benutzbaren elastischen Eigenschwingungen eines einzigen Quarzstabes ganz beträchtlich. Die transversalen Eigenschwingungen kleiner Ordnungszahl haben wesentlich niedrigere Frequenzen als die longitudinale Grundschwingung bei gleicher Stablänge. Aus den natürlichen Quarzkristallen sind nur selten homogene Stäbe von mehr als 10 cm Länge erhältlich. Bei Longitudinalschwingungen beträgt daher praktisch die kleinste erreichbare Frequenz etwa 27000 Hertz ( $\lambda = 11000$  m); die transversale Grundfrequenz eines 10 cm langen Quarzstabes von 1,5 mm Dicke in der Schwingungsrichtung ist etwa 800 Hz. Man kann also jetzt piezoelektrische Resonatoren (ebenso Oszillatoren) auch für hörbare Frequenzen herstellen und in der sehr bequemen Form der leuchtenden Resonatoren benutzen. Besonders auch in demjenigen akustischen Frequenzbereich (oberhalb von etwa 2000 Hz), wo die gebräuchlichen Stimmgabeln aus Stahl manche Mängel haben, stehen damit äußerst präzise Frequenznormale für die Meßtechnik zur Verfügung. Für den Hochfrequenzbereich der drahtlosen Telegraphie ergeben sich die weiteren Vorteile, daß bei fast ebenso leichter Anregbarkeit die transversalen Eigenfrequenzen infolge ihrer höheren Ordnungszahlen hier viel dichter liegen, als die longitudinalen Eigenfrequenzen, daß also im gleichen Frequenzintervall viel mehr Normalfrequenzen für Meßzwecke benutzbar sind und endlich, daß man für die Herstellung eines Resonators von vorgegebener Frequenz mit viel kürzeren und deshalb leichter homogen zu erhaltenden Stablängen auskommt. Die vorliegenden Untersuchungen haben ferner gezeigt, daß man anstatt der bisher meist benutzten Orientierung I von Quarzstäben auch die zu jener senkrechte Orientierung II benutzen kann. Um eine Vorstellung von der Anzahl, Verteilung und Größe der piezoelektrisch anregbaren Eigenfrequenzen eines einzigen Quarzstabes zu haben, ist in der folgenden Taf. I das Frequenzspektrum eines 50 mm langen Stabes der Orientierung II von den Querdimensionen  $y = 1,5$ ,  $z = 3$  mm zusammengestellt. Hierzu ist zu bemerken, daß sich Transversalschwingungen niedrigster Ordnung bei Stäben der Orientierung II nur sehr schwer und ohne Leuchtbild anregen lassen (vgl. Abschn. 10), während dies bei der Orientierung I in Anordnung Abb. 7, I ziemlich leicht und mit Leuchterscheinung bis herab zu

Tafel 1. Elastische Eigenschwingungen eines 50 mm langen Quarzstabes der Orientierung II von den Querdimensionen  $y = 1,5$ ,  $z = 3$  mm.  $f$  = Frequenz,  $\lambda$  = Wellenlänge.

Longitudinalschwingungen			Transversalschwingungen						Torsionsschwingungen					
in Richtung der X-Achse			in Richtung der Y-Achse			in Richtung der Z-Achse			um die X-Achse					
$k$	$\lambda$ m	$f$ Hertz	$k$	$\lambda$ m	$f$ Hertz	$k$	$\lambda$ m	$f$ Hertz	$k$	$\lambda$ m	$f$ Hertz			
1	5520	54 350	1	88 910	3 372	1	46 300	6 480	1	9670	31 020			
			2	32 510	9 228							2	17 050	17 600
			3	16 750	17 907							3	8 900	33 700
2	2761	108 600	4	10 022	29 930	4	5 510	54 400	2	4832	62 100			
			5	6 980	43 000	5	3 785	79 260	3	3226	93 000			
			6	5 050	59 400	6	2 839	105 700	4	2422	123 900			
3	1840	163 000	7	3 865	77 620	7	2 175	137 900	5	1937	154 900			
			8	3 065	97 900	8	1 755	170 900	6	1614	185 900			
			9	2 491	120 400	9	1 462	205 200	7	1385	216 600			
4	1384	216 800	10	2 083	144 400	10	1 242	241 500	8	1210	248 000			
			11	1 773	169 200	11	1 078	278 300	9	1075	279 100			
			12	1 530	196 000	12	947	316 800	10	967	310 200			
5	1106	271 300	13	1 345	223 000	13	842	356 300	11	878	341 700			
			14	1 189	252 300	14	757	396 300	12	806	372 200			
			15	1 063	282 200	15	687	436 700	13	743	403 800			
6	922	325 400	16	962	311 800				14	690	434 800			
			17	872	344 000				15	644	465 800			
			18	803	373 600									
7	790	379 600	19	739	406 000									
			20	683	439 200									
			21	638	470 200									
8	692	433 500												
9	616	487 200												

einer Frequenz von 1300 Hz (Stabdimeision  $x = 1,5$ ,  $y = 80$ ,  $z = 1,5$  mm) gelang. Die in Taf. 1 unter  $k = 1-3$  angegebenen Frequenzen der Transversalschwingungen sind berechnete und nicht beobachtete Werte.

## 12. Die Gesetze der drei Schwingungsarten.

Für die Eigenfrequenzen  $f$  von dünnen Stäben rechteckigen Querschnitts gelten bei isotropem Medium — wie bekannt — die folgenden Formeln:

für longitudinale Schwingungen:

$$f = \frac{k}{2l} \cdot \sqrt{\frac{E}{s}} \quad (4)$$

für transversale Schwingungen:

$$f = \frac{m^2}{4\pi l \sqrt{3}} \cdot \frac{a}{l^2} \cdot \sqrt{\frac{E}{s}}, \quad m = \left(k + \frac{1}{2}\right) \cdot \pi \quad (5)$$

für Torsionsschwingungen:

$$f = \frac{k}{2l} \cdot \frac{2v}{\sqrt{1+v^2}} \cdot \sqrt{1-F \cdot v} \cdot \sqrt{\frac{G}{s}} \quad (6)$$

Hierbei bedeutet:  $l$  die Länge des Stabes,  $a$  seine zur Schwingungsrichtung parallele Querdimension,  $v$  das Verhältnis der kleineren zur größeren Querdimension,  $E$  den Elastizitätsmodul,  $G$  den Torsionsmodul,  $s$  die Dichte und  $k = 1, 2, 3 \dots$  die Ordnungszahl der Schwingung. Die Größe  $F$  ist, für isotrope Medien, mit praktisch meist ausreichender Genauigkeit gleich 0,630 zu setzen.

Man sollte zunächst erwarten, daß die Formeln (4) und (5) auch für Quarzstäbe der hier benutzten beiden Orientierungen Gültigkeit haben und für Stäbe der Orientierung II auch Formel (6), wenn man nach Voigt<sup>13)</sup> für den Faktor  $F$ , in welchen

<sup>13)</sup> W. Voigt, Wied. Ann. 31, 499, 1887.



neben  $E$  und  $G$  noch andere von den 6 elastischen Konstanten des Quarzes eingehen, den Wert 0,77 einsetzt. Die Meßergebnisse der vorliegenden Untersuchungen haben ergeben, daß dieses für Formel (5) bei hohen Frequenzen nicht annähernd zutrifft, während die Formeln (4) und (6) nicht völlig, aber doch mit weitgehender Näherung richtig bleiben. Hierzu sei an dieser Stelle noch kurz folgendes mitgeteilt<sup>14</sup>): Die longitudinalen Oberschwingungen sind nicht genau harmonisch. Die Abweichungen vom Harmoniegesetz sind für dünne, d. h. im Verhältnis zu den Querdimensionen lange Stäbe (z. B.  $l = 80$  mm, Querschnitt  $1,5 \times 3$  mm) bei niedrigen Ordnungszahlen sehr gering (Größenordnung  $10^0_{100}$ ) und erreichen mit höheren Ordnungszahlen, z. B.  $k = 20$ , etwa 1%; sie wachsen nicht stetig mit der Ordnungszahl, sondern sind bald größer, bald kleiner, aber schwanken in systematischer Weise und für beide Staborientierungen verschieden. Wesentlich genauer gehorchten die Eigenfrequenzen der Torsionsschwingungen eines Stabes der Orientierung II (Abmessungen  $80 \times 3 \times 1,5$  mm) dem Harmoniegesetz (Formel (6)); die Abweichungen von diesem Gesetz lagen für alle Oberschwingungen zwischen  $k = 1$  bis  $k = 17$  innerhalb etwa  $\pm 10^0_{100}$ . Die Formel (5) ist insofern auch für isotrope Medien nur eine Näherungsformel, als bei ihrer Ableitung außer acht gelassen ist, daß bei transversalen Schwingungen die Stabquerschnitte außer einer translatorischen auch eine Drehbewegung ausführen. Aber auch wenn man diese durch eine von Rayleigh<sup>15</sup>) angegebene Korrektur berücksichtigt, kommen die Beobachtungen am Quarz nicht in quantitative Übereinstimmung mit der Theorie. Jedoch hat sich gezeigt, daß eine aus Formel (5) unter Berücksichtigung der Rayleighschen Korrektur resultierende Gleichungsform die Beobachtungen recht gut darstellt. Diese empirische Formel lautet:

$$(5a) \quad \frac{1}{f} \cdot m^2 = \sqrt{a + \beta (6m + m^2)},$$

wo  $m$  die gleiche Bedeutung wie in Formel (5) hat und  $a$  und  $\beta$  für einen bestimmten Stab frequenzunabhängige Konstanten sind. Bei kleinen Ordnungszahlen, also kleinen Werten von  $m$ , wird

<sup>14</sup>) Eine ausführliche Mitteilung über diese quantitativen Beziehungen an der Hand von Meßergebnissen wird in der ZS. f. Physik erscheinen.

<sup>15</sup>) Lord Rayleigh, The Theory of Sound, London 1877, S. 238.

das zweite Glied unter der Wurzel klein gegen  $a$ ; Formel (5a) geht dann über in (5). Die Konstante  $a$  enthält also dieselben Größen wie Formel (5). Die Konstante  $\beta$  ist proportional  $l^2$ , ändert sich für gleich lange Stäbe gleicher Orientierung mit der Schwingungsrichtung und ein wenig mit der Größe der Querdimensionen, sowie für Stäbe gleicher Abmessungen nicht unwesentlich mit der Orientierung. Die Bedeutung der Konstanten  $\beta$ , in welche andere Elastizitätsmoduln des Quarzes eingehen werden, könnte nur aus einer auf Kristallstäbe anwendbaren strengen Theorie der Transversalschwingungen erschlossen werden, die bisher nicht entwickelt ist.

Wie groß die Abweichungen der nach Formel (5) berechneten Frequenzen von den wirklich beobachteten sind, die dem Gesetz (5a) gehorchen, ergibt sich an der Hand von Taf. I u. a. daraus, daß für die Transversalschwingungen in der  $Y$ -Richtung bei  $k = 16$  das Glied  $\beta (6m + m^2)$  in Formel (5a) etwa ebenso groß ist wie  $a$ ; gehorchten diese Schwingungen dem einfachen Gesetz (5), so würde bei der Ordnungszahl  $k = 16$  bereits die Frequenz von 400 000 Hz erreicht sein, die in Wirklichkeit erst bei  $k = 19$  erreicht wird.

Die Frequenzmessungen ergeben aus den Formeln (4), (6) und (5) (bzw. 5a) für kleines  $m$  bis auf wenige Prozent die gleichen Werte von  $E$  und  $G$ , wie sie von Voigt<sup>16</sup>) aus statischen Messungen ermittelt wurden.

### 13. Piezoelektrische Anregung elastischer Schwingungen von Ringen aus Quarz.

Über elastische Schwingungen von Ringen, die aus verschiedenen Gründen eingehender von uns untersucht wurden, mögen an dieser Stelle nur einige besonders interessante Erscheinungen mitgeteilt werden. Die piezoelektrische Anregung von Schwingungen der drei verschiedenen Arten bei Ringen, deren Ebene stets senkrecht zur optischen Achse lag, gelingt nach den gleichen Grundsätzen wie bei Stäben. Man konnte auch hier zahlreiche Oberschwingungen bis zu hohen Ordnungszahlen erregen. Unter diesen Oberschwingungen spielt die dritte longitudinale, bei welcher drei elastische Wellen oder sechs Halbwellen auf den Ringumfang entfallen, eine ausgezeichnete Rolle, weil die drei elektrischen Achsen des Quarzes bei der angegebenen Orientierung des Ringes (vgl. auch Abb. 1) den Ring-

<sup>16</sup>) W. Voigt, Wied. Ann. 31, 718, 1887.

umfang an sechs Punkten schneiden. Die Deformationsverteilung längs des Umfanges des schwingenden Ringes erfolgt nun, wie die Versuche zeigten, so, daß die sechs Deformationsmaxima an den sechs Schnittpunkten der drei Achsen mit dem Umfang liegen und hier starke piezoelektrische Ladungen erzeugen. Dies zeigt deutlich das Leuchtbild<sup>17)</sup> (Abb. 16), eines im Vakuum schwingenden Ringes bei der dritten Oberschwingung. Man erkennt außerdem in der Mitte zwischen den starken Leuchtbüscheln, welche die Lage der elektrischen Achsen angeben, sechs wesentlich

eigentümliche Erscheinung, die für die Ladungsverteilung bei allen Ringschwingungen typisch, wenn auch nicht immer gleich gut ausgeprägt ist; die Anzahl der einzelnen Leuchtbüschel ist auf der inneren und der äußeren Ringfläche verschieden. Dies findet seine Erklärung in folgendem: Die Bogenelemente des Ringumfangs haben alle möglichen Orientierungen zu den Achsen unseres Koordinatensystems; diejenigen Bogenelemente, die senkrecht auf einer  $X$ - oder  $Y$ -Achse stehen, verhalten sich piezoelektrisch wie die Stäbe unserer Orientierung I bzw. II. Nun entstehen nach Abschnitt 8 (Abb. 10 u. 11) bei Orientierung I in Richtung der  $X$ -Achse, bei II in Richtung der

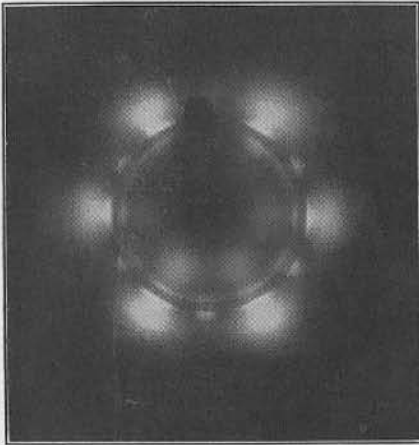


Abb. 16. Longitudinalschwingung.  
Ringdimensionen in mm:  $z = 3$ ,  
 $d_1 = 31$ ,  $d_2 = 28$ .  
 $k = 3$ ;  $f = 185020$  Hz;  $\lambda = 1621$  m.  
Leuchtbild gesehen aus  $Z$ -Richtung.

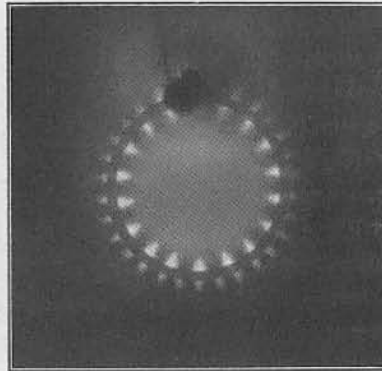


Abb. 17.  
Transversalschwingung in Ringebene.  
Ringdimensionen in mm:  $z = 3$ ,  
 $d_1 = 31$ ,  $d_2 = 28$ .  
 $k = 12$ ;  $f = 212300$  Hz;  $\lambda = 1413$  m.  
Leuchtbild gesehen aus  $Z$ -Richtung.

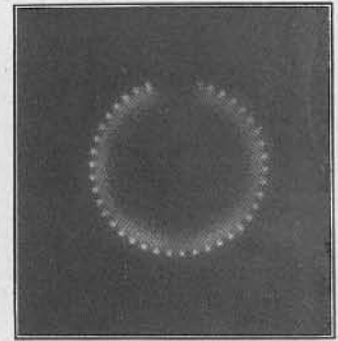


Abb. 18.  
Transversalschwingung in Ringebene.  
Ringdimensionen in mm:  $z = 3$ ,  
 $d_1 = 31$ ,  $d_2 = 28$ .  
 $k = 24$ ;  $f = 629400$  Hz;  $\lambda = 476,4$  m.  
Leuchtbild gesehen aus  $Z$ -Richtung.

schwächere Leuchtbüschel; sie entstehen aus denselben Gründen wie die Leuchterscheinungen bei longitudinal schwingenden Stäben der Orientierung II (Abschn. 6, Abb. 4, II) als Raumladungen. Es ist ersichtlich, daß das Leuchtphänomen bei der dritten longitudinalen Oberschwingung eines Ringes eine Methode an die Hand gibt, die Lage der drei elektrischen Achsen zu bestimmen, die bei geeigneter Versuchsanordnung wesentlich genauer ist als die übliche Bestäubungsmethode. Die durch optische Mittel zu erreichende Orientierung der Ringebene senkrecht zur optischen Achse ist dabei Voraussetzung. Die Dämpfung longitudinaler Schwingungen ist geringer als die von Stäben, weil der Luftwiderstand an den Stirnflächen der letzteren bei Ringen fortfällt.

Das Leuchtbild (Abb. 17) eines transversal in seiner Ebene schwingenden Ringes zeigt eine

$Y$ -Achse beiderseits der Mittelebene der Stäbe bei I gleichnamige, bei II entgegengesetzte Ladungen. Bei dazwischen liegenden Orientierungen müssen Kombinationen beider Grenzfälle eintreten. Diese Überlagerung ergibt für Ringschwingungen als Resultat, daß bei Oberschwingungen oberhalb  $k = 3$  die Anzahl der Leuchtbüschel an der äußeren Ringfläche gleich  $2(k + 3)$ , an der inneren gleich  $2(k - 3)$  ist. Diese Beziehung ist bedingt durch die Anzahl 3 der elektrischen Achsen.

Das Leuchtbild einer transversalen Ringschwingung sehr hoher Ordnung,  $k = 24$ , bei der 48 elastische Halbwellen auf den Ringumfang von 95 mm entfallen, zeigt Abb. 18. Die 54 Lichtbüschel am äußeren Umfang des Ringes sind hier äußerst lichtschwach, die 42 Büschel innen aber sehr kräftig und gleichmäßig ausgebildet.

<sup>17)</sup> Bei den Abb. 16 bis 18 rührt der dunkle Abschnitt oben am Ring von den Anregungselektroden her.